



東邦大学

いのち
生命の科学で未来をつなぐ

加減算の原理



$$43 + 17 = ? ?$$



$$43 + 17 = ??$$

あなたは どうやって 足しますか？

って言われたって

ねえ

まあこんなところか？

下の桁から足してゆく

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 17 \\ \hline 11 \end{array}$$

まあこんなところか？

その桁と繰上りを分ける

$$\begin{array}{r} \overset{1}{3} \quad 4 \\ + \quad 1 \quad 7 \\ \hline 11 \quad 1 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

まあこんなところか？

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} + \quad \overset{1}{\boxed{3}} \quad \boxed{4} \\ \quad \boxed{1} \quad \boxed{7} \\ \hline \quad \boxed{5} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

まあこんなところか？

$$\begin{array}{r} + \\ \hline \begin{array}{r} \overset{1}{3} \\ 1 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 7 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 5 \\ 1 \end{array} 1 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

下の桁から 1 桁ずつ
足した結果のうち
上の桁は繰上りに、
下の桁はそこに置く
次の桁は繰上りも
一緒に(3つ)足す

2進数でも同じこと

下の桁から足してゆく

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

2進数でも同じこと

その桁と繰上りを分ける

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} 101 \\ + 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} 101 \\ + 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

$$1_2 + 1_2 = 10_2$$

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 1101 \\ \hline 101010 \end{array}$$

下の桁から1桁ずつ

足した結果のうち

上の桁は繰上りに、

下の桁はそこに置く

次の桁は繰上りも

一緒に(3つ)足す

筆算の足し算をやってみよう

$$\begin{array}{r} 1001 \\ + 1100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ + 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 1100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1111 \\ \hline \end{array}$$

筆算の足し算をやってみよう

$$\begin{array}{r} 1001 \\ + 1100 \\ \hline 11101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ + 1111 \\ \hline 10100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 1100 \\ \hline 1111 \end{array}$$

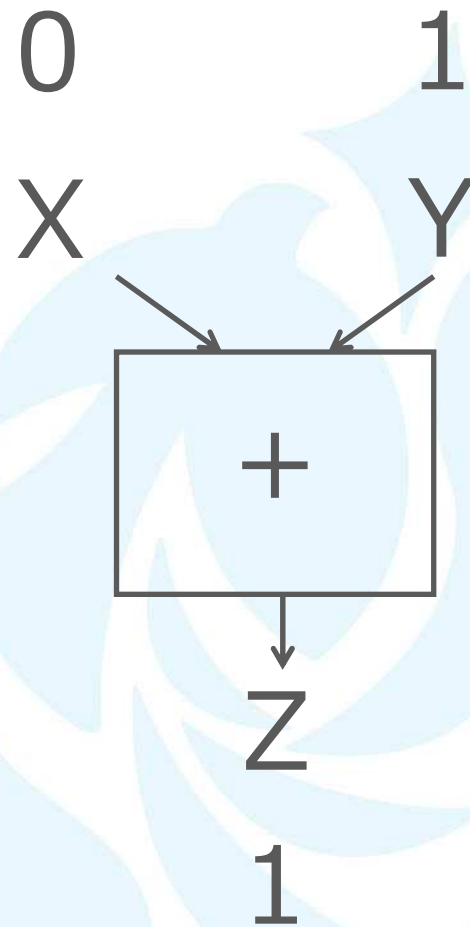
$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1111 \\ \hline 10000 \end{array}$$

これを機械として実現するには？

これを機械として実現するには？

まず 1桁の足し算

1桁の足し算ボックス



ですか？



東邦大学

繰上り？

$$\begin{array}{r} 0111 \\ + 1011 \\ \hline \end{array}$$

The diagram illustrates a binary addition problem. The numbers 0111 and 1011 are stacked vertically. A horizontal line is drawn under the bottom number. A red arrow points from the top-right '1' of the top number to the top-right '1' of the bottom number, indicating a carry. A red dashed box highlights the bottom-right '1' of the bottom number and the '10' below it, representing the carry and the resulting sum for that column.

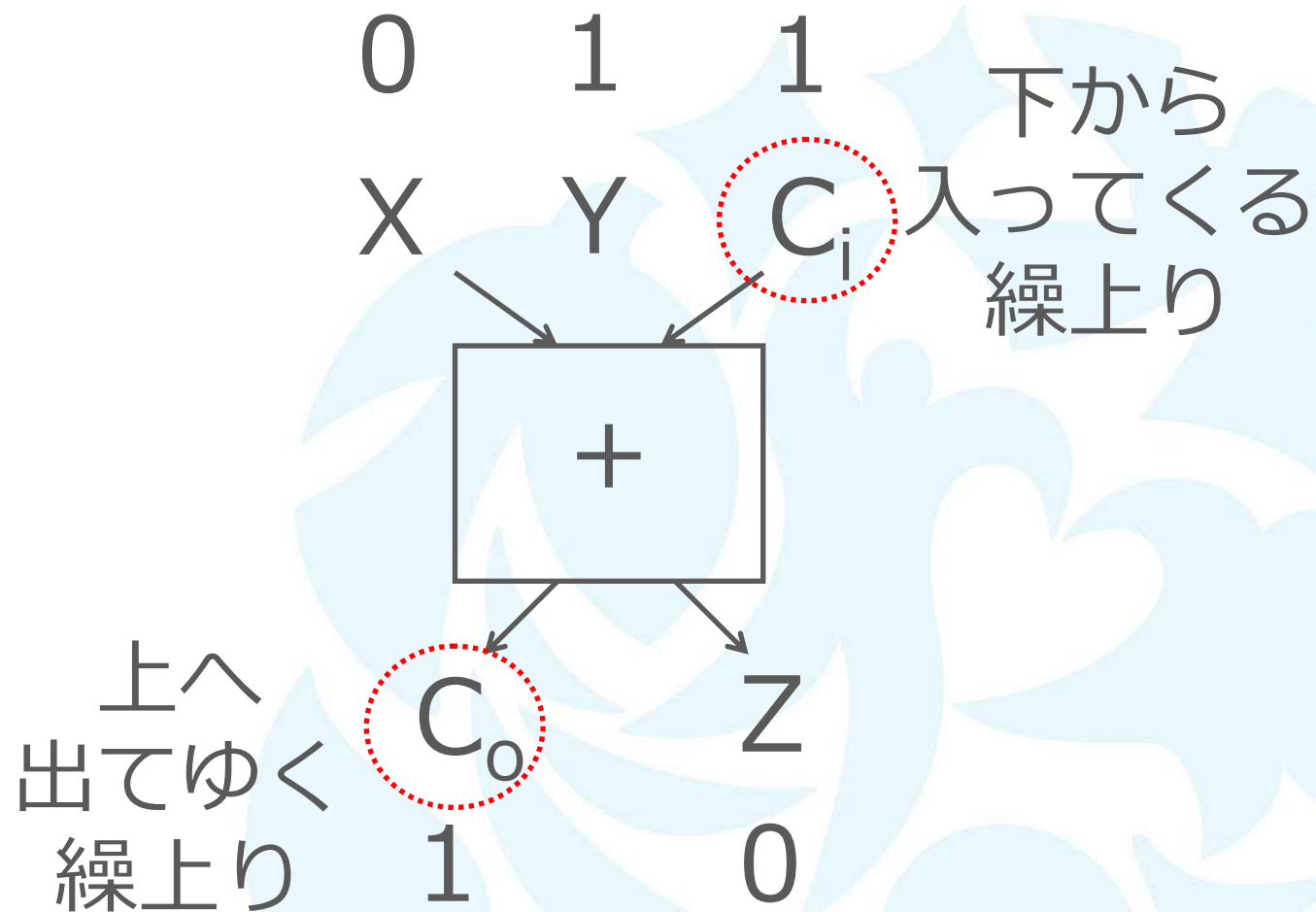
繰上り？

$$\begin{array}{r} 0111 \\ + 1011 \\ \hline \end{array}$$

The diagram illustrates binary addition with carry propagation. The numbers 0111 and 1011 are added. A red line traces the path of the carry: it starts at the second column (1+0=1), moves to the first column (1+1=10), then to the second column (1+1=10), and finally to the third column (1+0=1). Dotted circles highlight the '1' in the second column and the '10' in the third column. Dotted arrows point from these highlights to the text below.

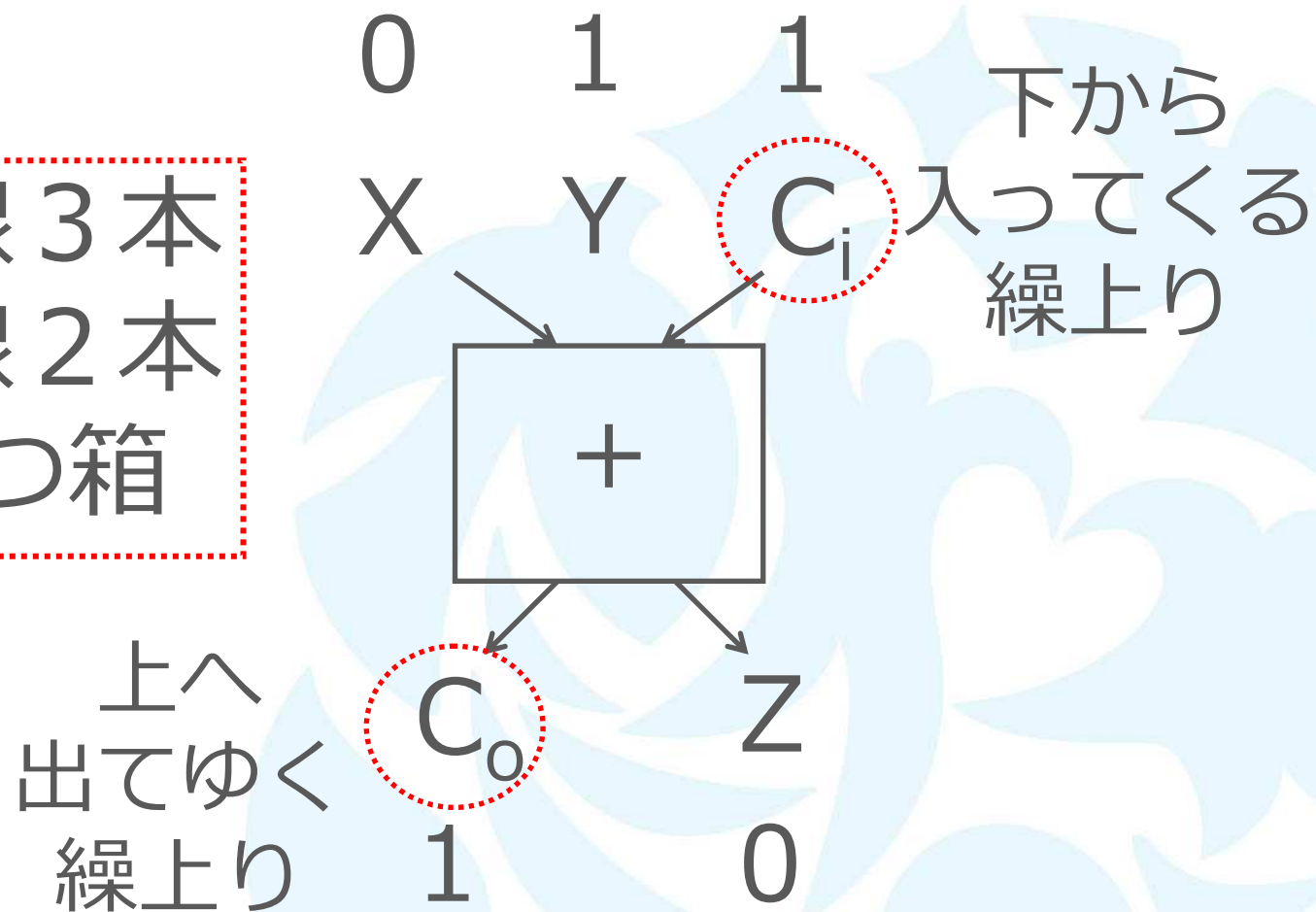
繰上りは入ってくる 繰上りは出てゆく

1桁の足し算ボックス・繰上り付き



1桁の足し算ボックス・繰上り付き

入力線 3 本
出力線 2 本
をもつ箱



1桁の足し算 = 3入力 2出力の箱

1桁の足し算 = 3入力 2出力の箱

それで、線の値の関係は？

1桁の足し算 = 3入力 2出力の箱

それで、線の値の関係は？



それぞれの入力線にどんな値 (0/1) が入ると
それぞれの出力線にどんな値が出てくるのか

1桁の足し算 = 3入力 2出力の箱

それで、線の値の関係は？

それぞれの入力線にどんな値 (0/1) が入ると
それぞれの出力線にどんな値が出てくるのか

表にしてみよう

1桁の足し算

C_i	X	Y	C_o	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力

出力

1桁の足し算

0 / 1
入力のすべての
の組合せ

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力 出力



1桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

0 / 1 入力 of すべて of の組合せ

それぞれの入力に 対する出力の値

入力 出力

1桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

0 / 1 入力 of すべて of の組合せ

それぞれ of 入力に 対する出力の値

表を埋めてみよう

入力 出力

1桁の足し算

0 / 1
入力のすべての
の組合せ

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

$$0+0+0=00$$

$$0+0+1=01$$

$$0+1+0=01$$

$$0+1+1=10$$

$$1+0+0=01$$

$$1+0+1=10$$

$$1+1+0=10$$

$$1+1+1=11$$

入力

出力



東邦大学

1桁の足し算

0 / 1
入力のすべての
の組合せ

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$0+0+0=00$$

$$0+0+1=01$$

$$0+1+0=01$$

$$0+1+1=10$$

$$1+0+0=01$$

$$1+0+1=10$$

$$1+1+0=10$$

$$1+1+1=11$$

入力

出力



東邦大学

1桁の足し算

この表を
実現する
回路を
作れば
よい

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

入力 出力

あとは
「組合せ回路」の
設計の問題

あとは
「組合せ回路」の
設計の問題
機械的な手順で設計できる

この授業ではカバーしません

さて



東邦大学

さて
1桁の足し算回路ができた



東邦大学

さて
1桁の足し算回路ができた
では、32ビットの整数の足し算は？

複数桁の足し算

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of two 3-bit binary numbers, 011 and 101, resulting in 100. A red arrow indicates the carry from the second bit (1+0=1) to the third bit. Dotted boxes highlight the 11 in the second column and the 10 in the third column.

複数桁の足し算

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

The diagram shows a binary addition problem. The first row is 011, the second row is 101, and the result is 100. A red arrow points from the top-right '1' of the first row to the top-right '1' of the second row. Dotted boxes highlight the '11' in the first row and the '10' in the result row.

1 桁を繰上りでつないでゆけばよい

複数桁の足し算

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

A red arrow points from the top-right '1' to the '1' in the result '100'. Dotted boxes highlight the '11' in the top row and the '10' in the result row.

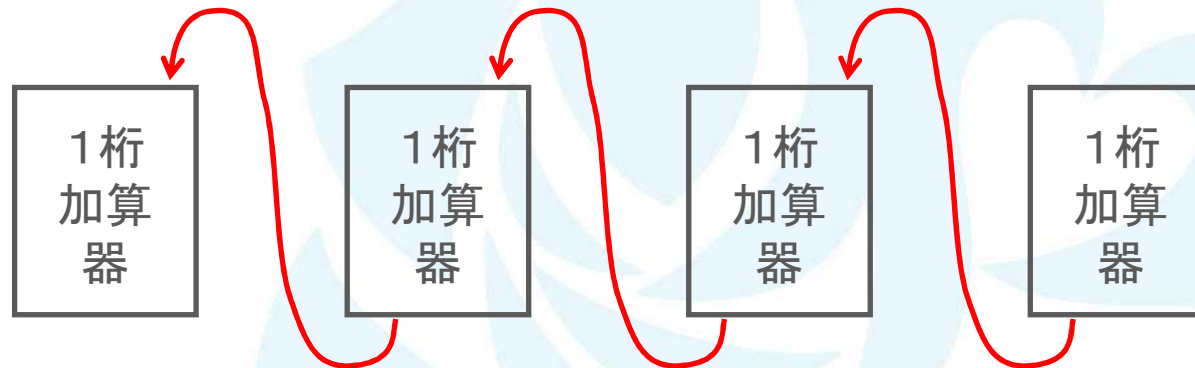
1桁を繰上りでつないでゆけばよい



複数桁の足し算

$$\begin{array}{r} 011 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

1桁を繰上りでつないでゆけばよい



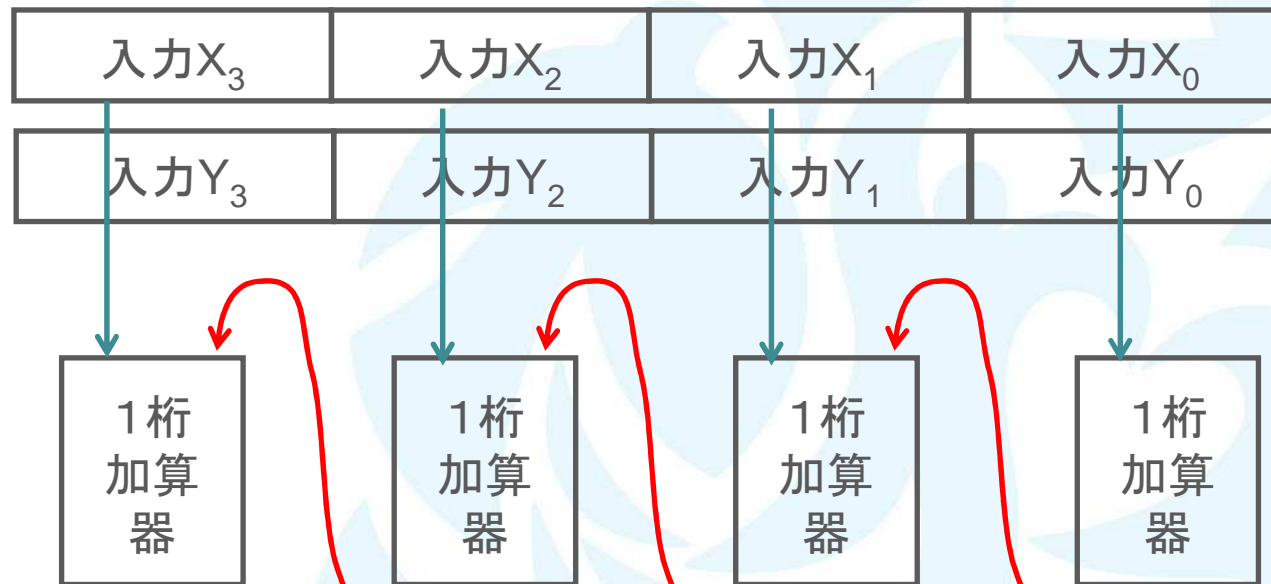
複数桁の足し算

更にXとYの入力をつないで



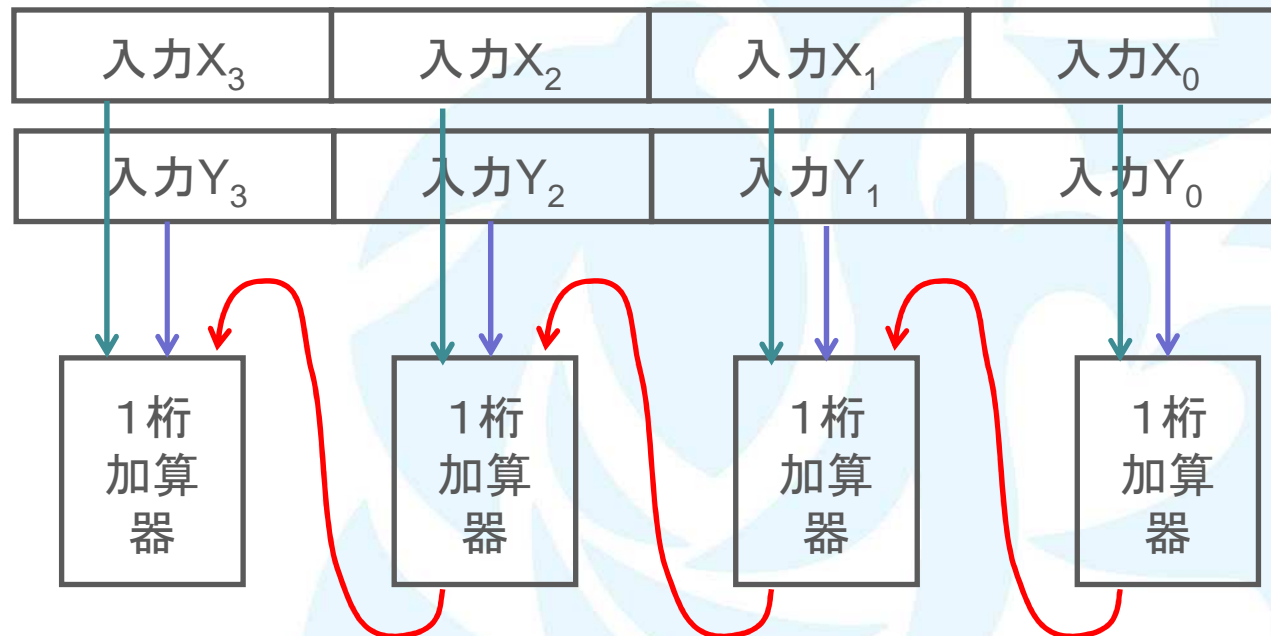
複数桁の足し算

更にXとYの入力をつないで



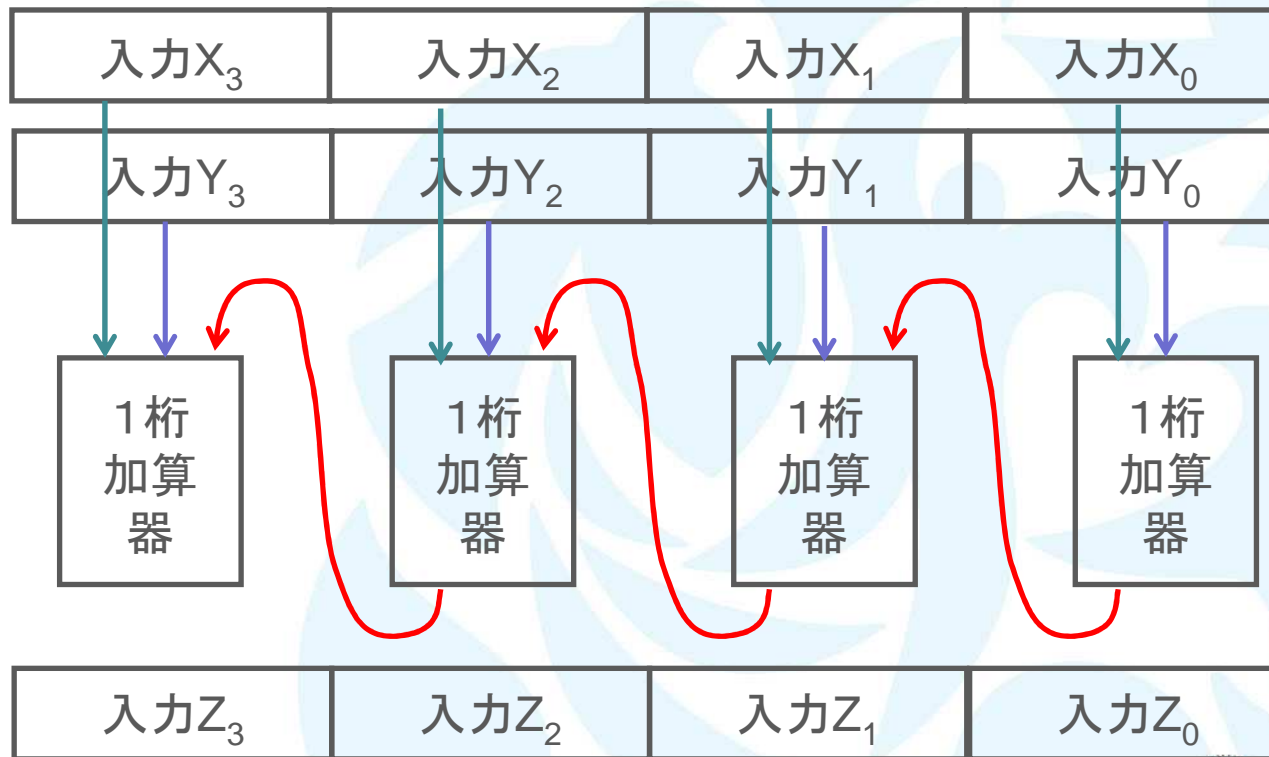
複数桁の足し算

更にXとYの入力をつないで



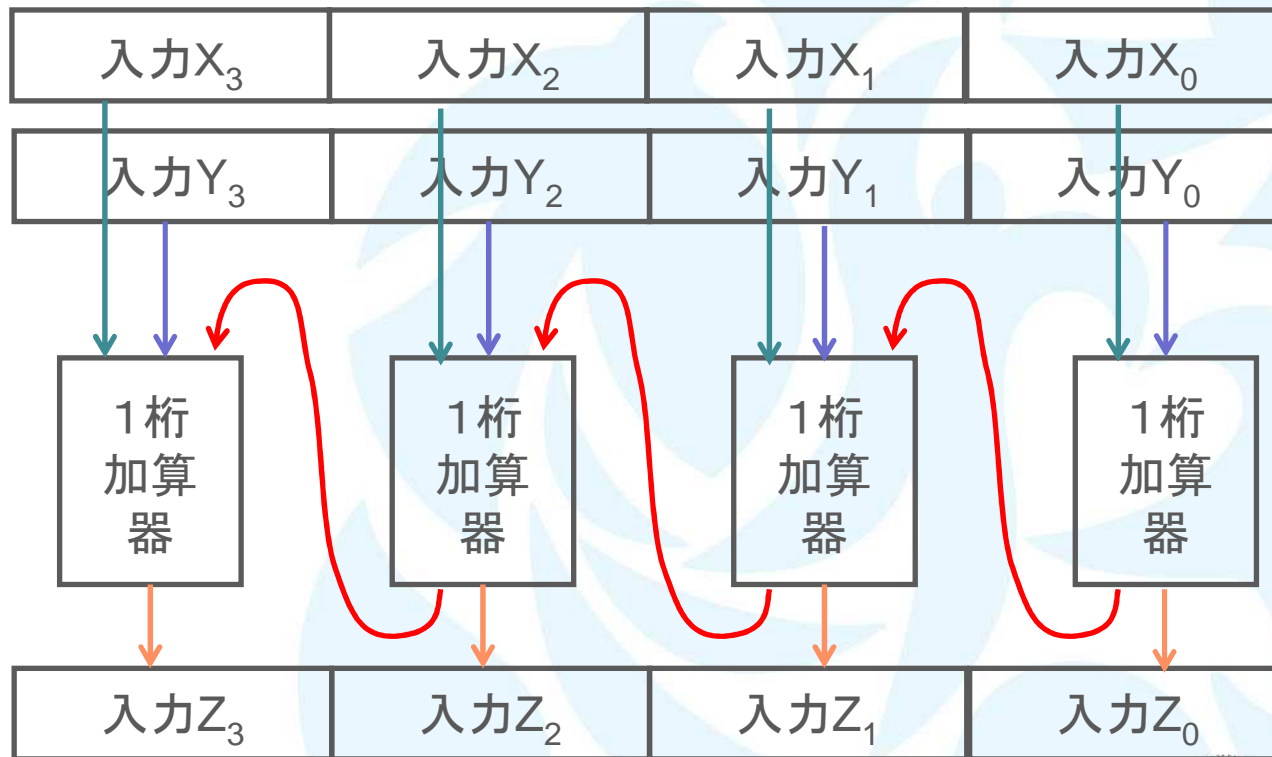
複数桁の足し算

更に出力Zをつないで



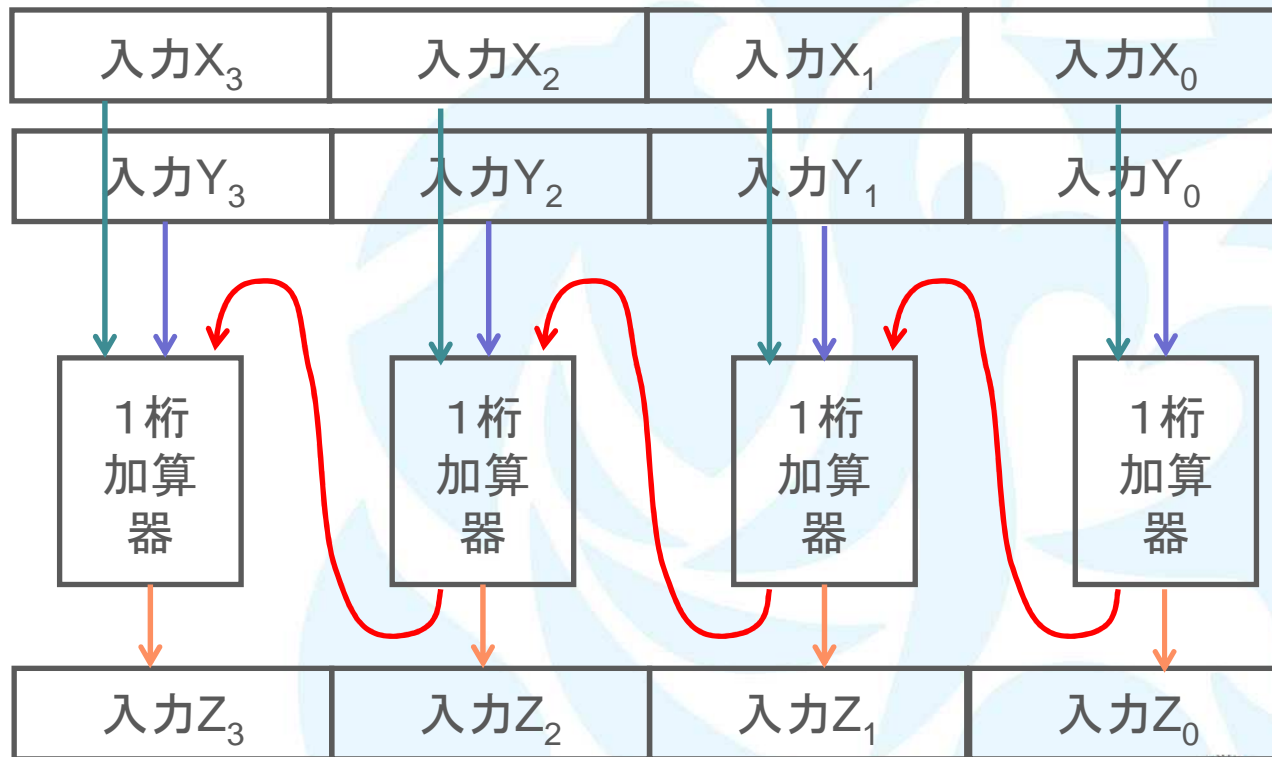
複数桁の足し算

更に出力Zをつないで



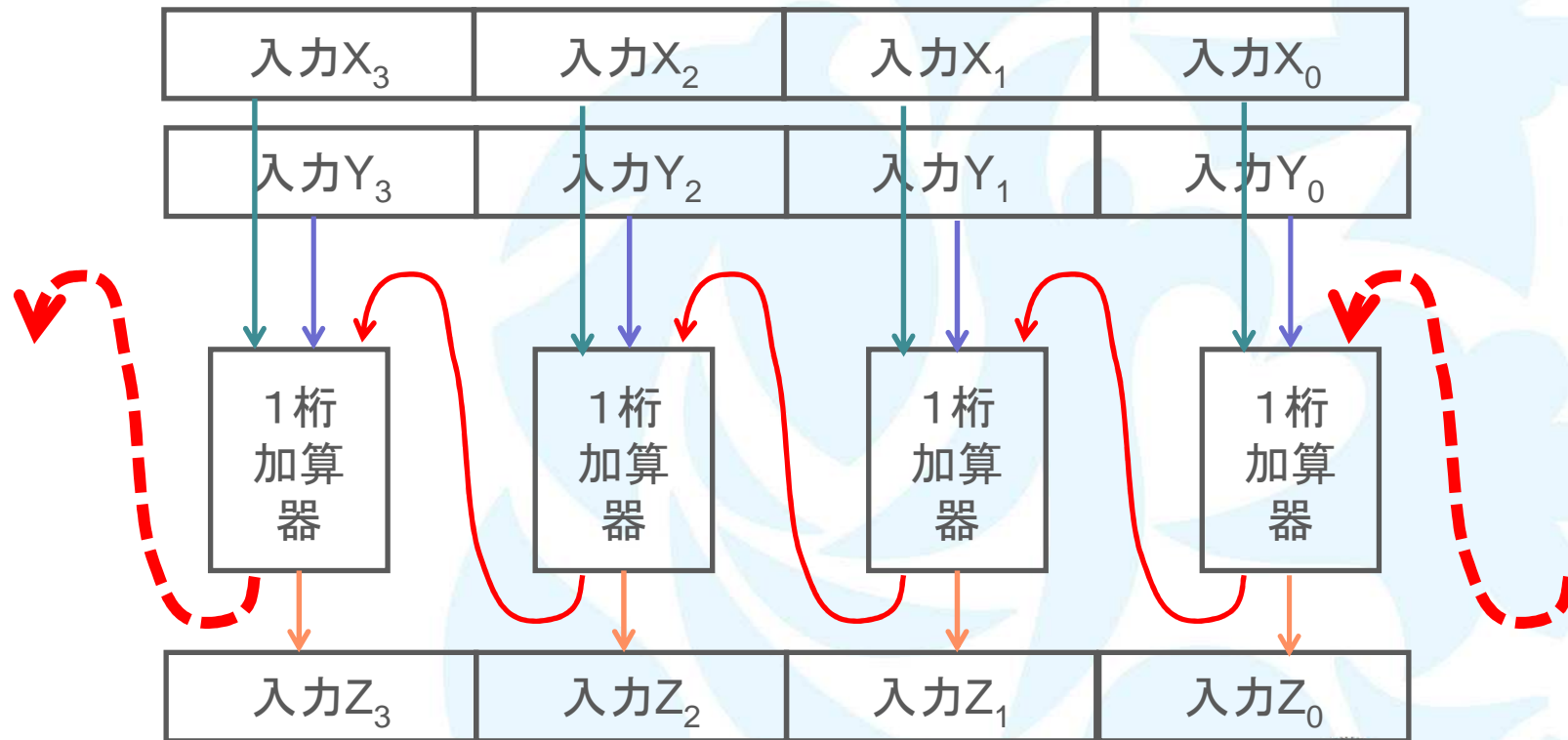
複数桁の足し算

完成？



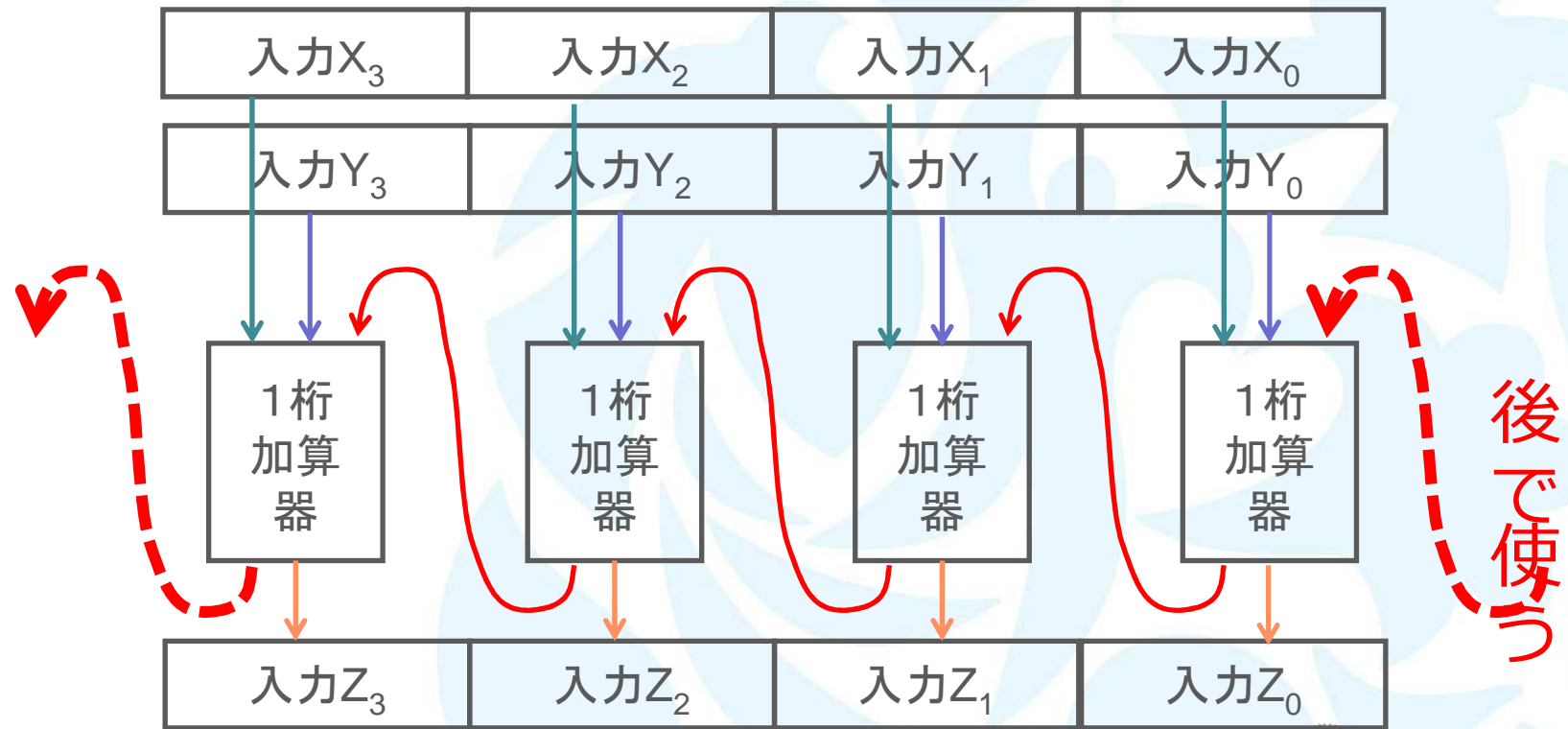
複数桁の足し算

ここはどうする？



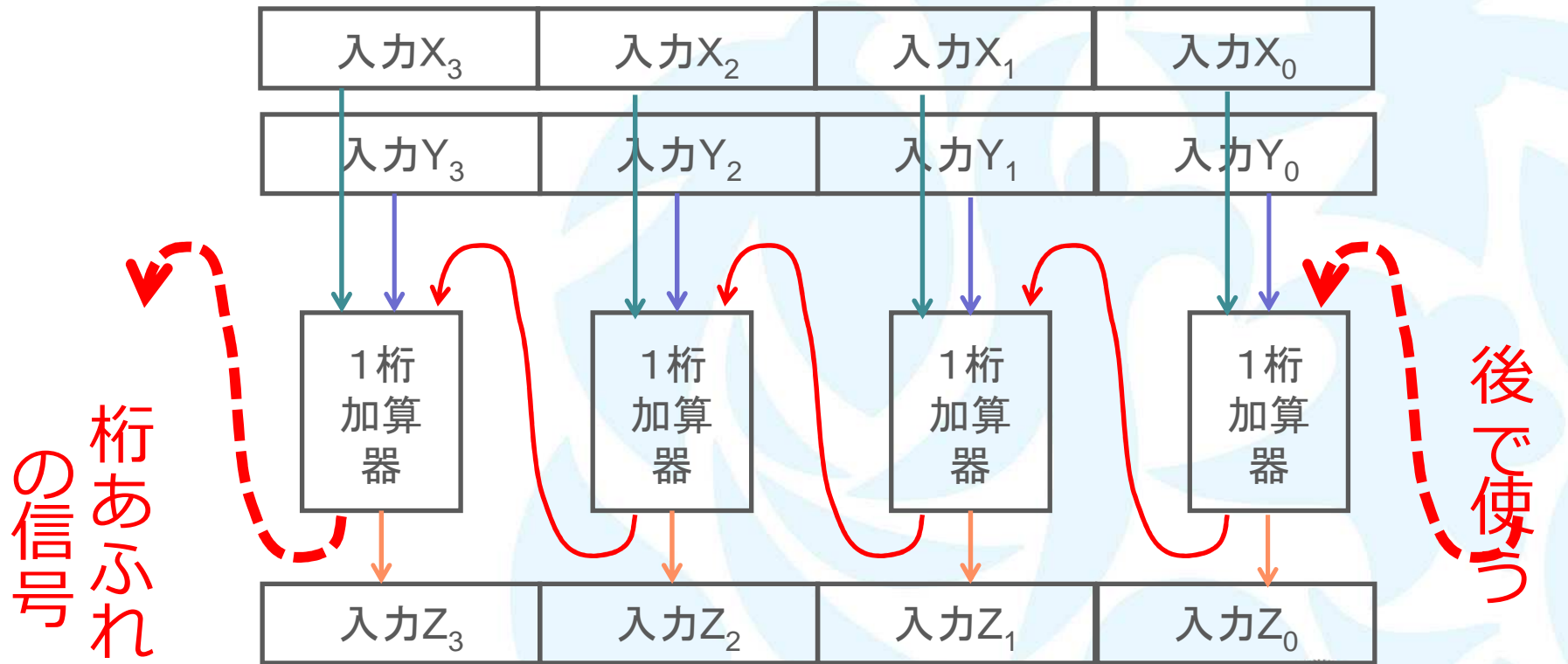
複数桁の足し算

ここはどうする？



複数桁の足し算

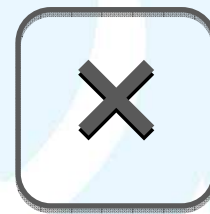
ここはどうする？



の信号
桁あふれ

後で使う

足し算回路の構成の仕方が
分かりましたか？



↓
次へ

では、確認の問題です

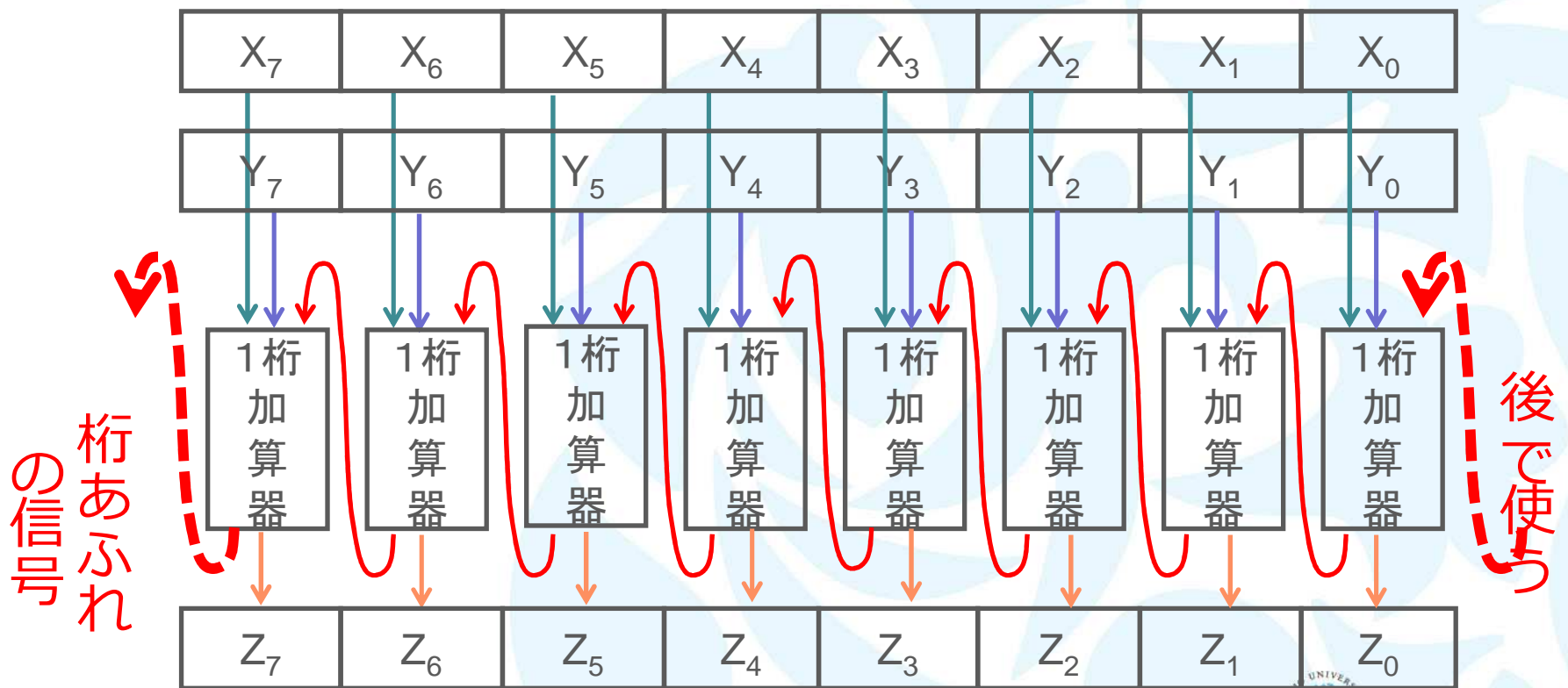
1桁の足し算回路の入力・出力の
対応表(真理値表)を作ってください

1桁の足し算回路の入力・出力の
対応表(真理値表)を作ってください

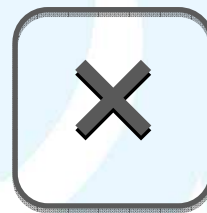
Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

1 桁の足し算回路をブロックと考えて
8 桁の足し算回路を作ってください

1桁の足し算回路をブロックと考えて 8桁の足し算回路を作ってください



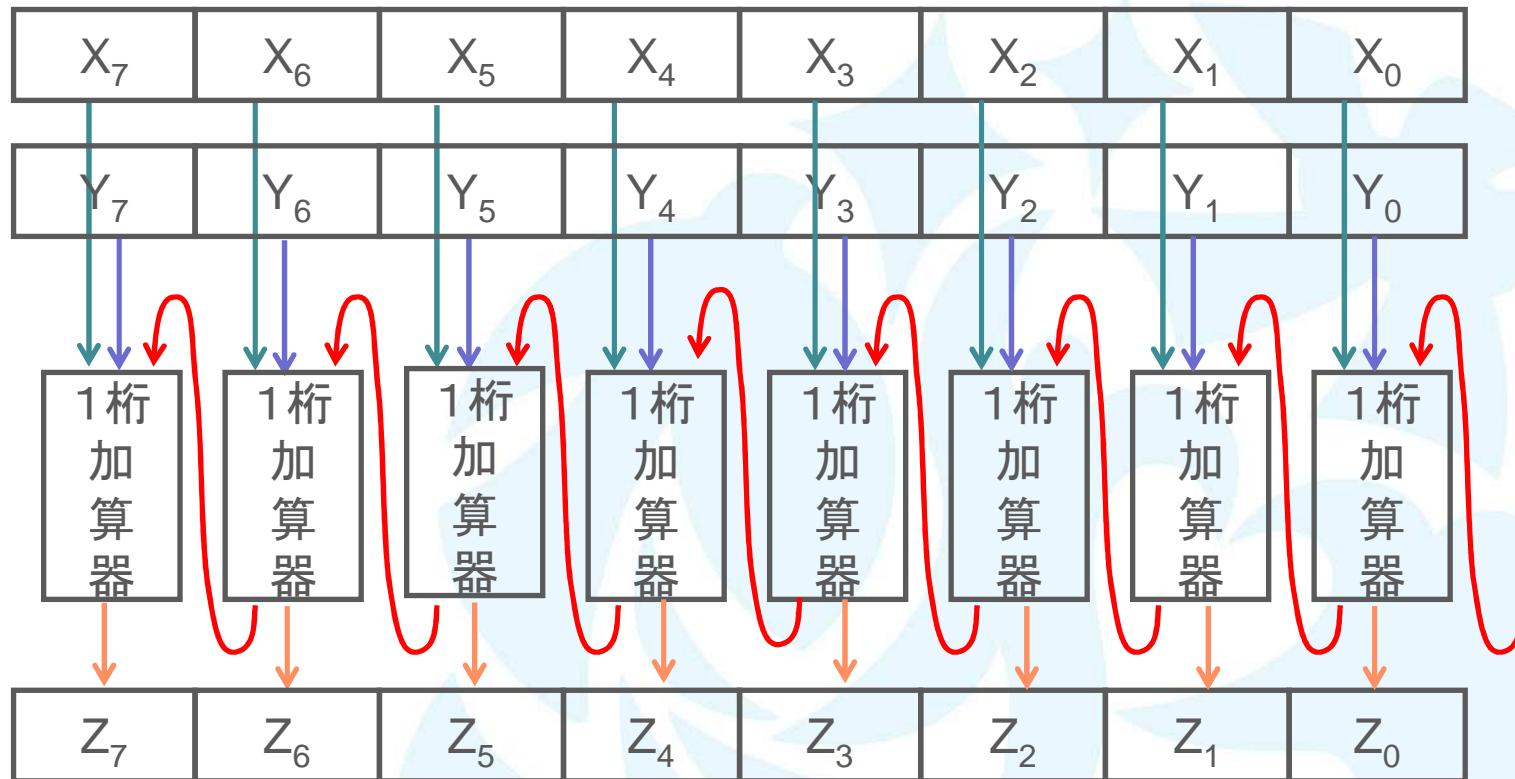
できましたか？



次へ

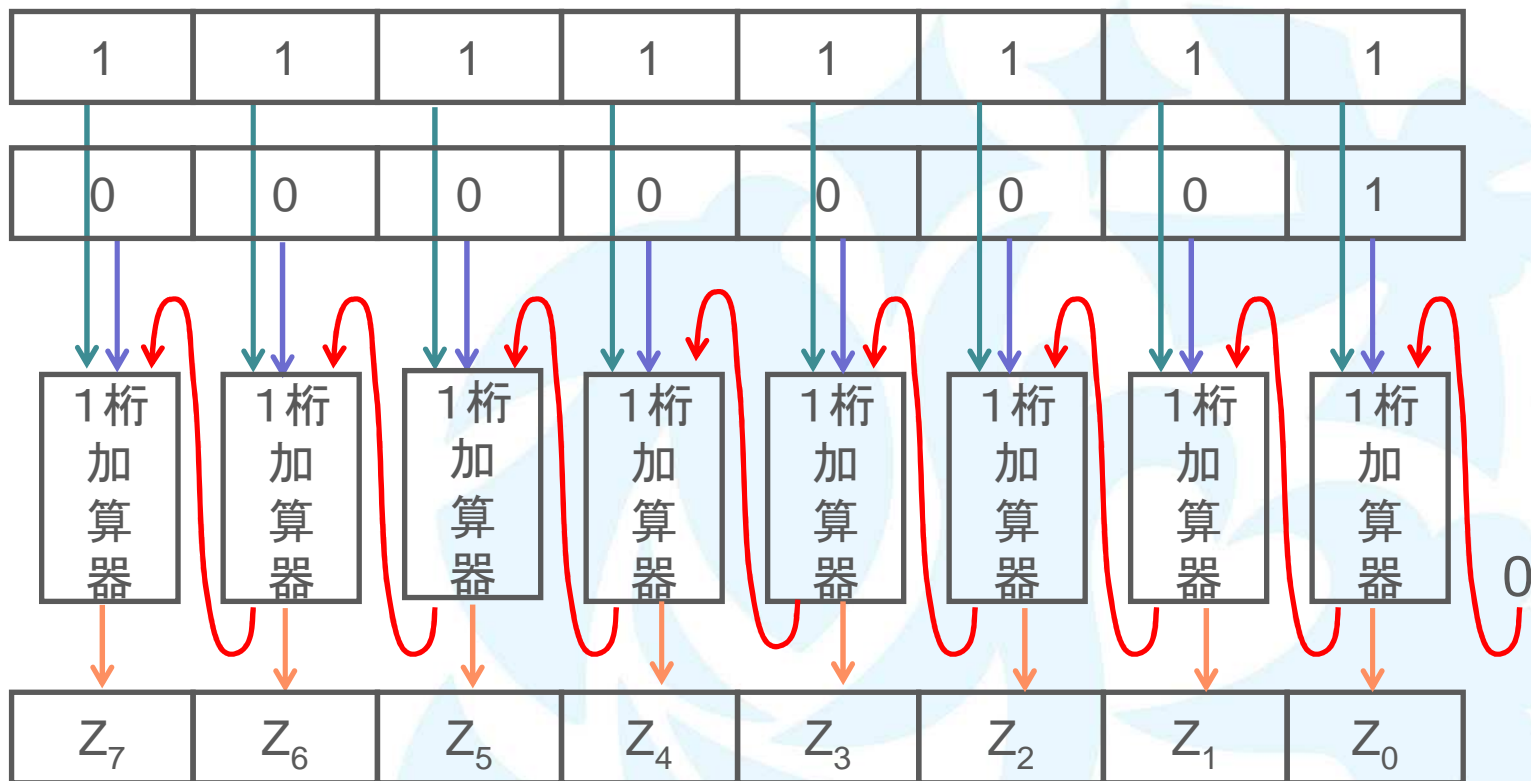
おまけの話題 ～ 高速化

この回路はとろい



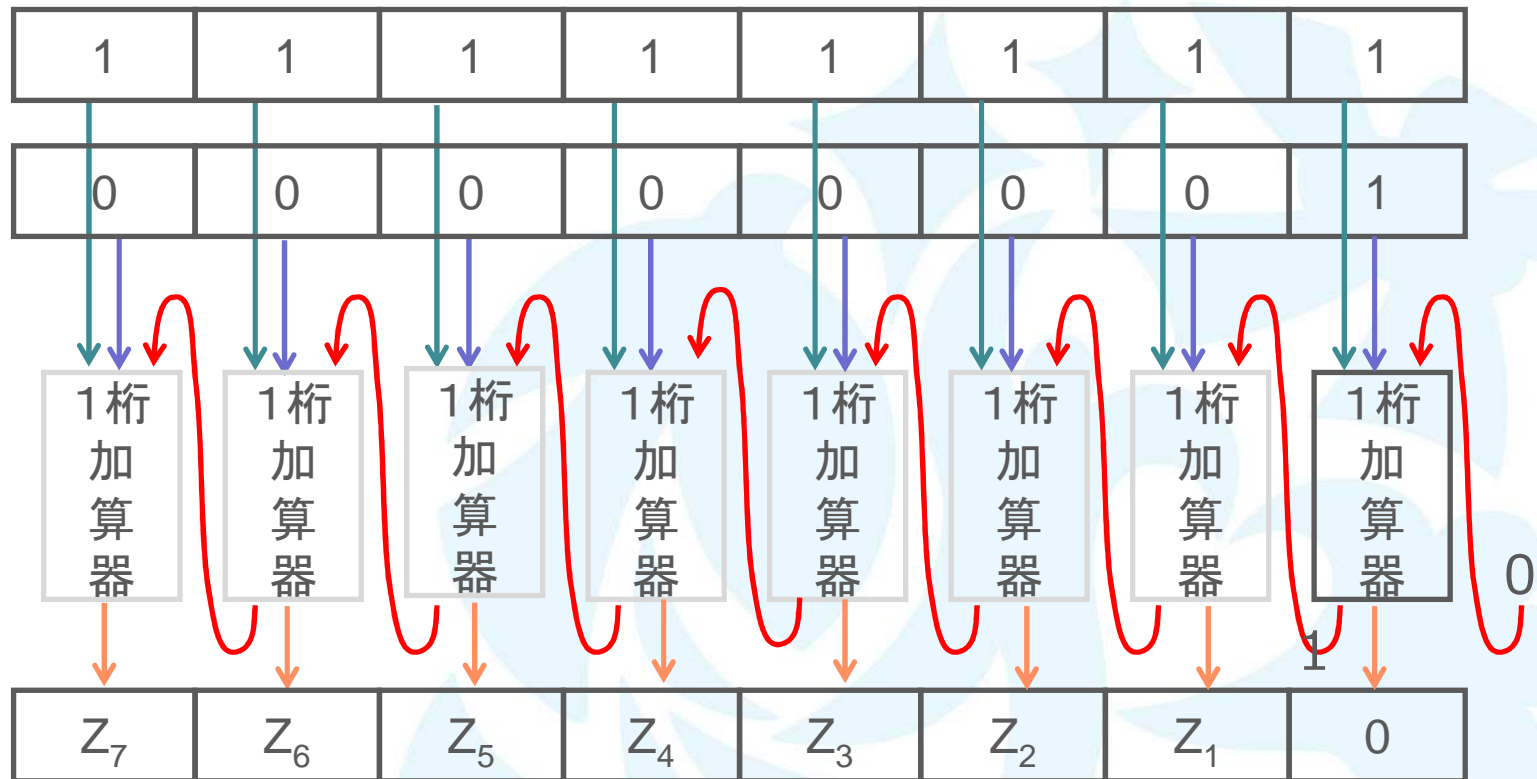
何で？

たとえば

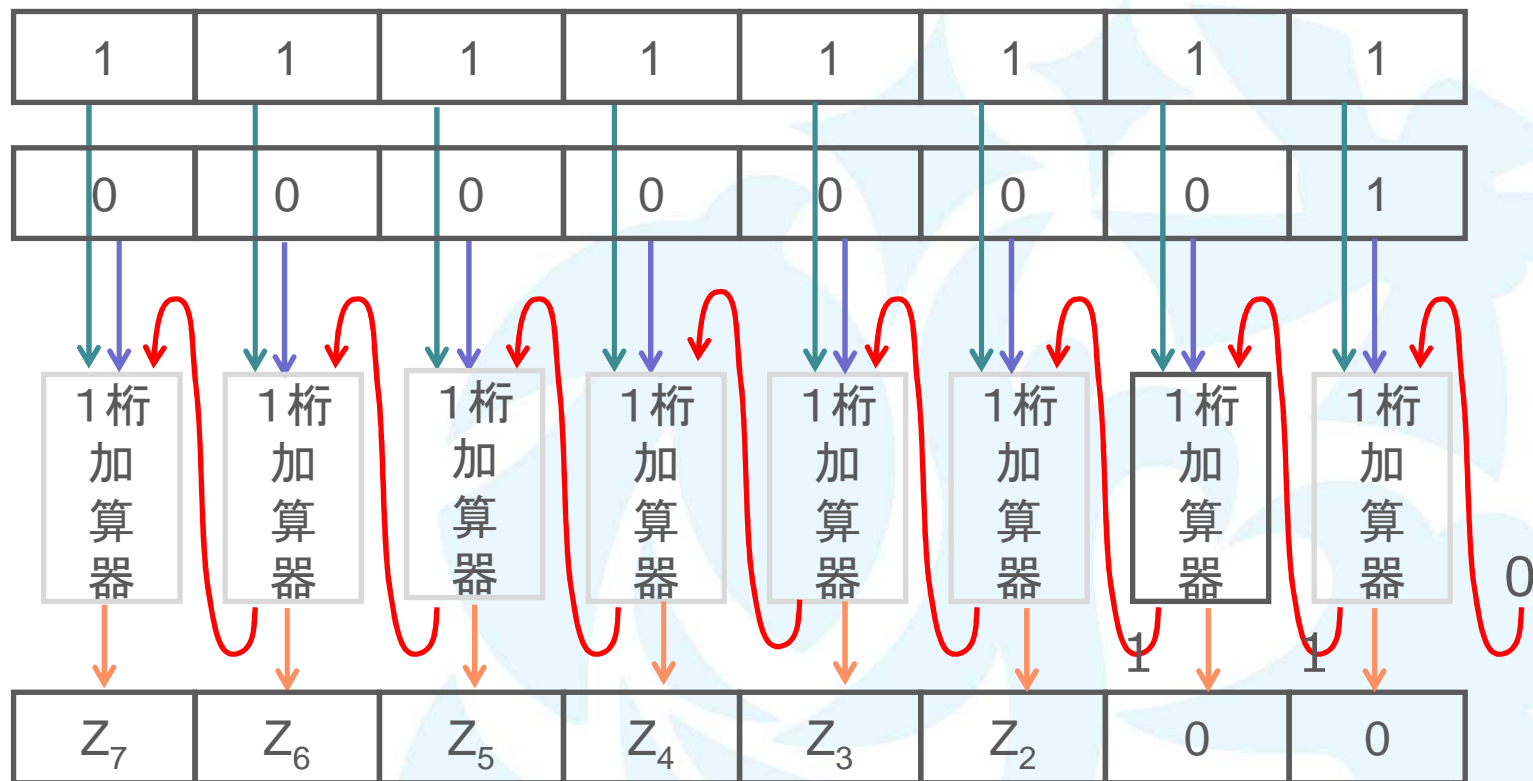


を計算してみよ

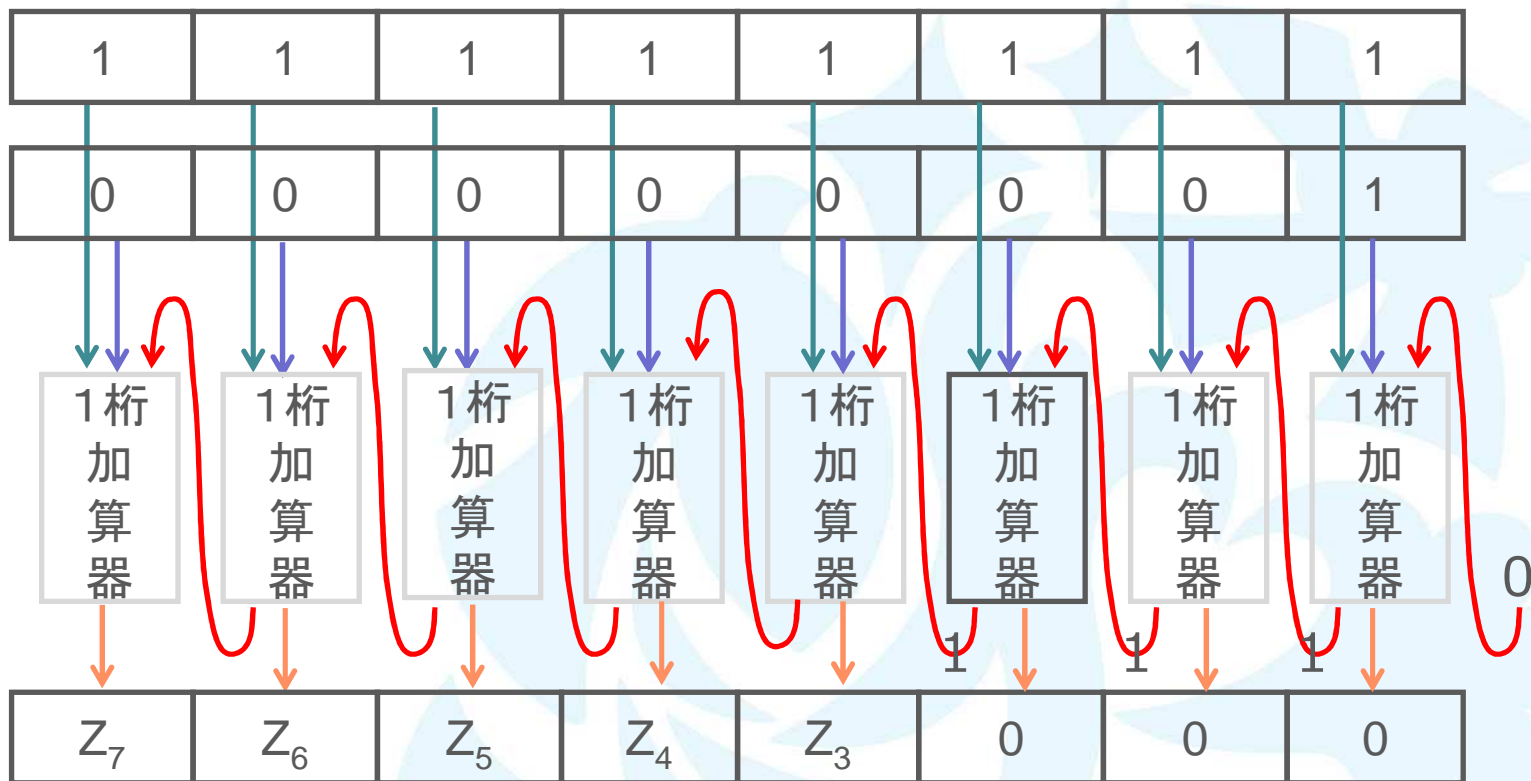
まず最下桁で Z_0 を計算



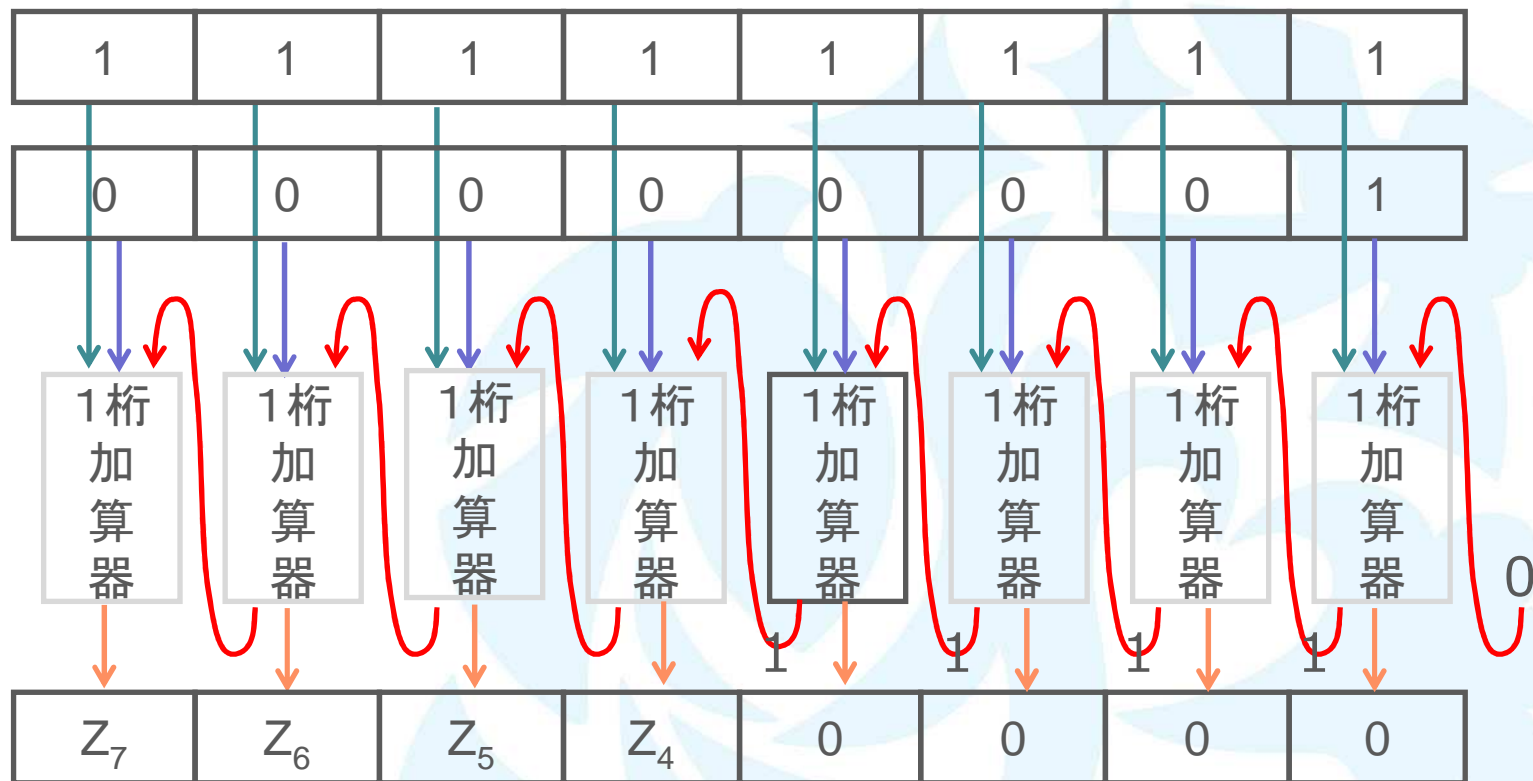
その結果を見て Z_1 を計算



その結果を見て Z_2 を計算



その結果を見て Z_3 を計算



このように



東邦大学

このように
下の桁の(繰上りの)値が決まらなると

このように
下の桁の(繰上りの)値が決まらないと
上の桁が計算できない

このように
下の桁の(繰上りの)値が決まらな
いと
上の桁が計算できない
これを繰上り(キャリー)の伝搬と
言う

このように

下の桁の(繰上りの)値が決まらなると

上の桁が計算できない

これを繰上り(キャリー)の伝搬と言う

この伝搬に時間がかかるのでとろい

では、どうすれば早くなるか？

では、どうすれば早くなるか？

キャリールックahead回路

詳細には立ち入らないが、繰上り信号を多段でなく1段で計算する回路。
たとえば32ビット×2の入力から各桁の繰上りの値(32個)を1段で計算

おまけは終り



東邦大学

さて

足し算はできるようになりました
では、引算はどうする？

足し算はできるようになりました
では、引算はどうする？

引算 = 符号反転して足し算

引算 = 符号反転して足し算

$$5 - 3 = 5 + \underbrace{(-3)}_{\substack{\text{符号反転} \\ 3 \Rightarrow (-3)}}_{\text{足し算}}$$

符号反転？

$3 \Rightarrow (-3)$

どうする？



符号反転？

$$3 \Rightarrow (-3)$$

2の補数を作ればいい



符号反転？

$$3 \Rightarrow (-3)$$

2の補数を作ればよい



ビット(0と1)を反転し
それに1を足す



東邦大学

引算全体は



引算全体は

X

—

Y

0と1を反転

1を足す



—Y

2の補数
を作る

引算全体は

X

−

Y

0と1を反転

1を足す

2の補数
を作る

X

+

−Y

引算全体は

X

−

Y

0と1を反転

1を足す

2の補数
を作る

X

+

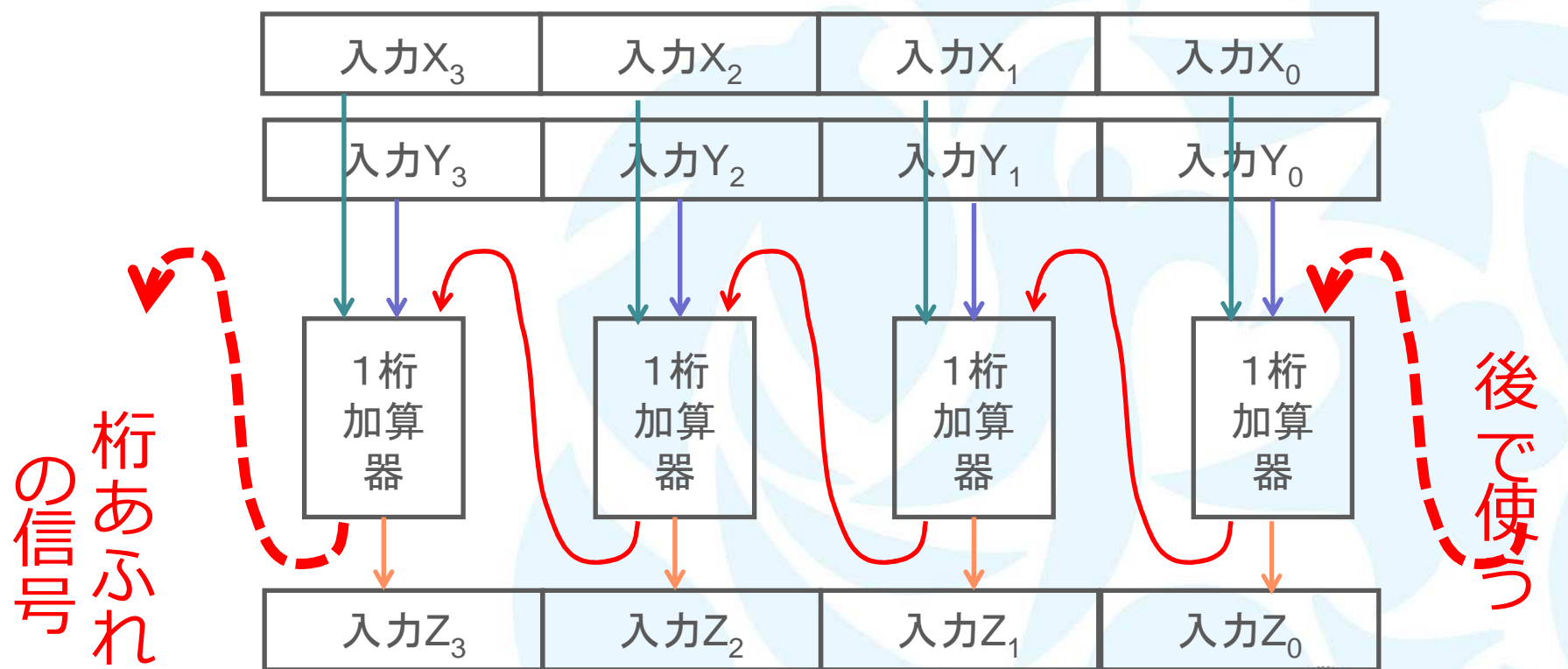
−Y

これを一緒に行う

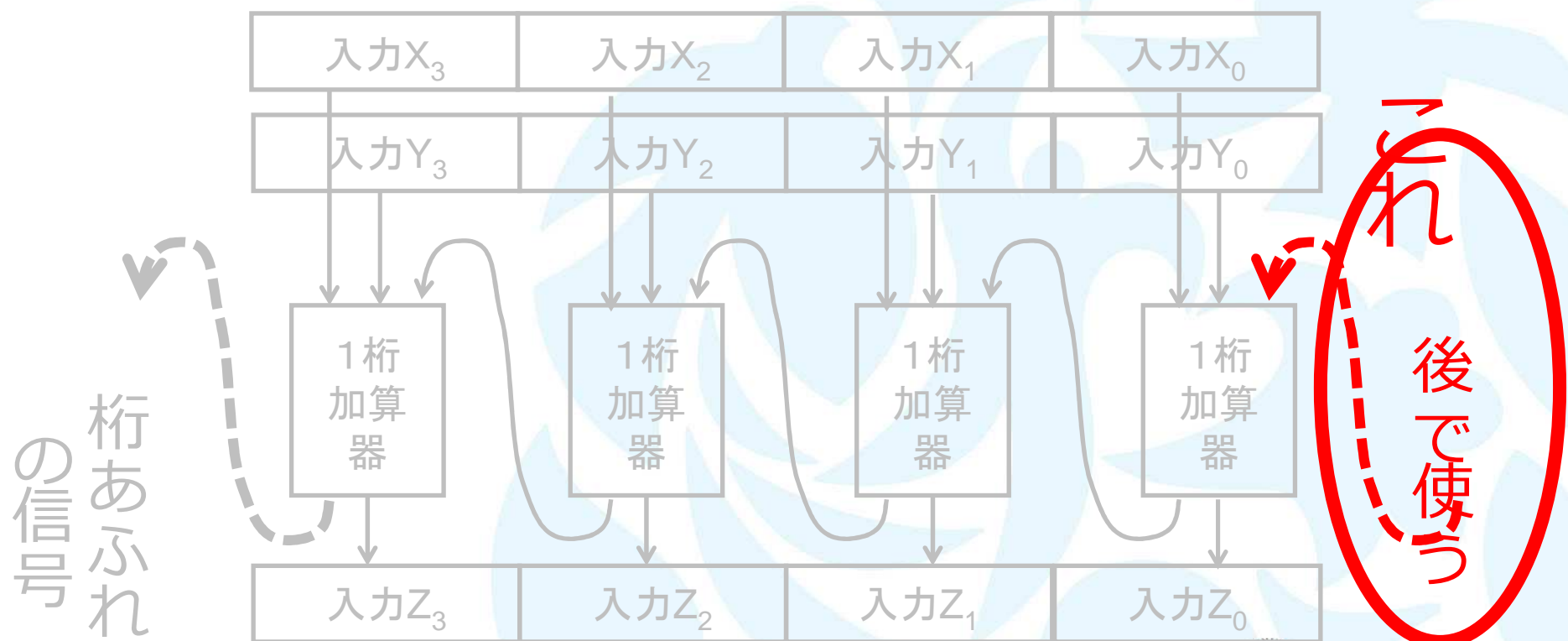


思い出してほしい 複数桁の足し算回路

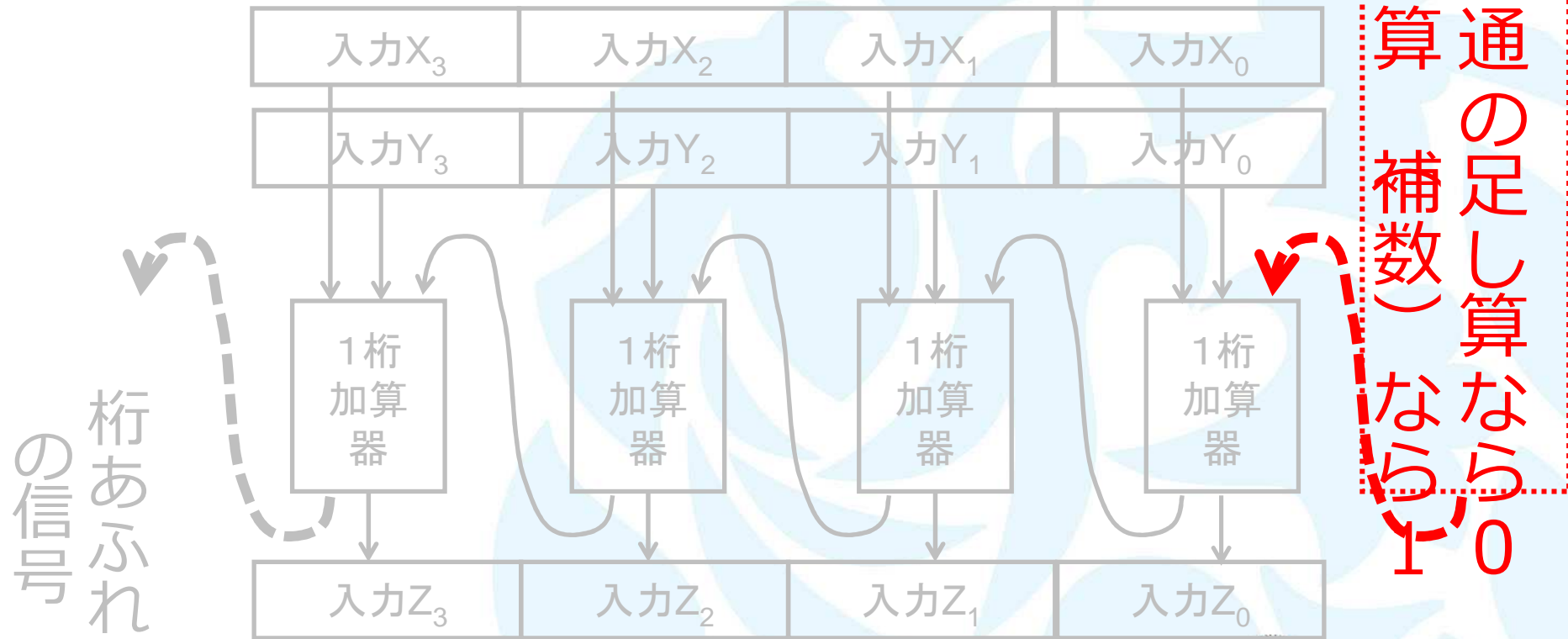
思い出してほしい 複数桁の足し算回路



思い出してほしい 複数桁の足し算回路



思い出してほしい 複数桁の足し算回路



引算全体は

X

—

Y

0と1を反転

1を足す

2の補数
を作る

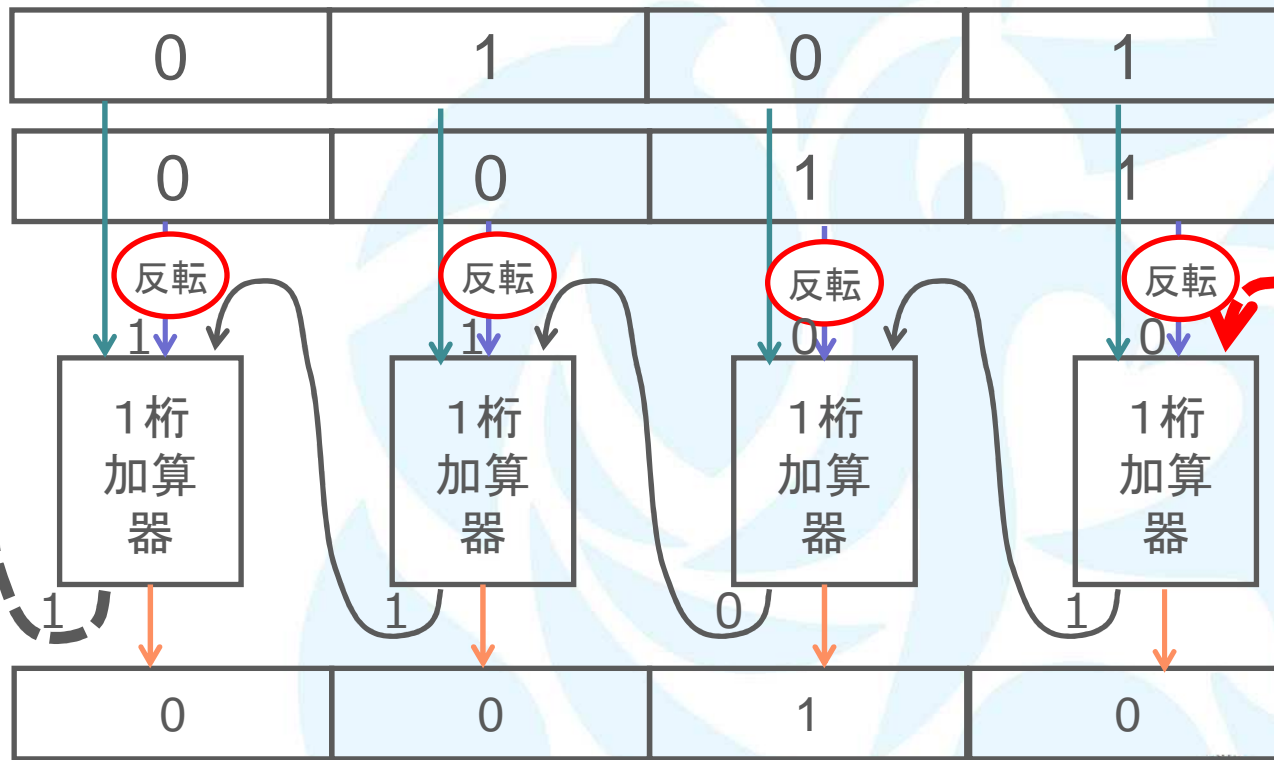
X

+

—Y

これを一緒に行う

たとえば
0101 - 0011 は



引算補数(なら)1

桁あふれの信号



東邦大学

のようによればできる

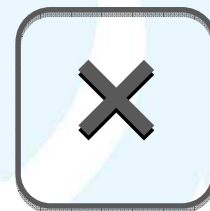


東邦大学

のようによすればできる

教科書の図5.8を参照

引算回路を理解できましたか？



↓
次へ