東邦大学

生命（いのち）の科学で未来をつなぐ

加減算の原理

43 + 17 = ？？

東邦大学

43 + 17 = ？？

あなたはどうやって足しますか？

って言われたって

ねぇ

まあこんなところか？

下の桁から足してゆく

$$
\begin{array}{rrr}
 & 3 & 4 \\
+ & 1 & 7 \\
\hline
 & 1 & 1
\end{array}
$$

まあこんなところか？

その桁と繰上りを分ける

$$\begin{array}{rrr} & {}^{1}3 & 4 \\ + & 1 & 7 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

上の桁は　下の桁は
繰上りに　そのまま

まあこんなところか？

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{rcccc} & & {}^{1}3 & & 4 \\ + & & 1 & & 7 \\ \hline & & 5 & 1 & 1 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

まあこんなところか？

```
  ¹3 4
+  1 7
--------
  5 1 1
```

上の桁は繰上りに

下の桁はそのまま

下の桁から１桁ずつ

足した結果のうち
　上の桁は繰上りに、
　下の桁はそこに置く

次の桁は繰上りも
　一緒に(３つ)足す

2進数でも同じこと

下の桁から足してゆく

$$
\begin{array}{r}
0\ 1\ \boxed{1} \\
+\ \ 1\ 0\ \boxed{1} \\
\hline
10
\end{array}
$$

$1_2+1_2=10_2$

2進数でも同じこと

その桁と繰上りを分ける

$$\begin{array}{rccc} & & {}^{1} & \\ & 0 & 1 & \boxed{1} \\ + & 1 & 0 & \boxed{1} \\ \hline & & \boxed{1} & \boxed{0} \end{array}$$

上の桁は繰上りに　下の桁はそのまま

2進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$
\begin{array}{rccc}
 & & {}^{1} & \\
 & 0 & 1 & \boxed{1} \\
+ & 1 & 0 & \boxed{1} \\
\hline
 & & \boxed{1} & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

２進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$
\begin{array}{rccc}
 & & {}^{1} & \\
 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 10 & 10 \; 0
\end{array}
$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

$1_2+1_2=10_2$

２進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & {}^{1}0 & {}^{1}1 & 1 \\
+ & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & \boxed{1}\boxed{0} & 1 & 0
\end{array}
$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

東邦大学

２進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

$$\begin{array}{rccc} & {}^{1}0 & {}^{1}1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 10 & 10 \end{array}$$

上の桁は
繰上りに

下の桁は
そのまま

$$1_2+1_2=10_2$$

東邦大学

２進数でも同じこと

繰上りを上の桁に移す

```
  1 1
  0 1 1
+ 1 0 1
--------
 10 10 10
```

下の桁から１桁ずつ

足したた結果のうち
　上の桁は繰上りに、
　下の桁はそこに置く

次の桁は繰上りも
　一緒に(３つ)足す

東邦大学

筆算の足し算をやってみよう

$$\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 1100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ 1100 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1111 \\ \hline \end{array}$$

筆算の足し算をやってみよう

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ +\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1 \\ +\ 1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ +\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

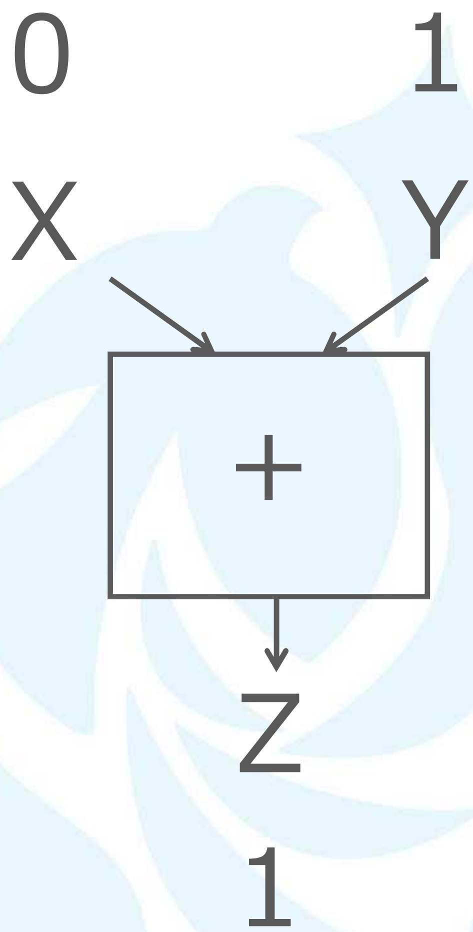
東邦大学

これを機械として実現するには？

これを機械として実現するには？

まず１桁の足し算

１桁の足し算ボックス



ですか？

繰上り？

$$\begin{array}{rrrr} & & {}^{1} & \\ & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

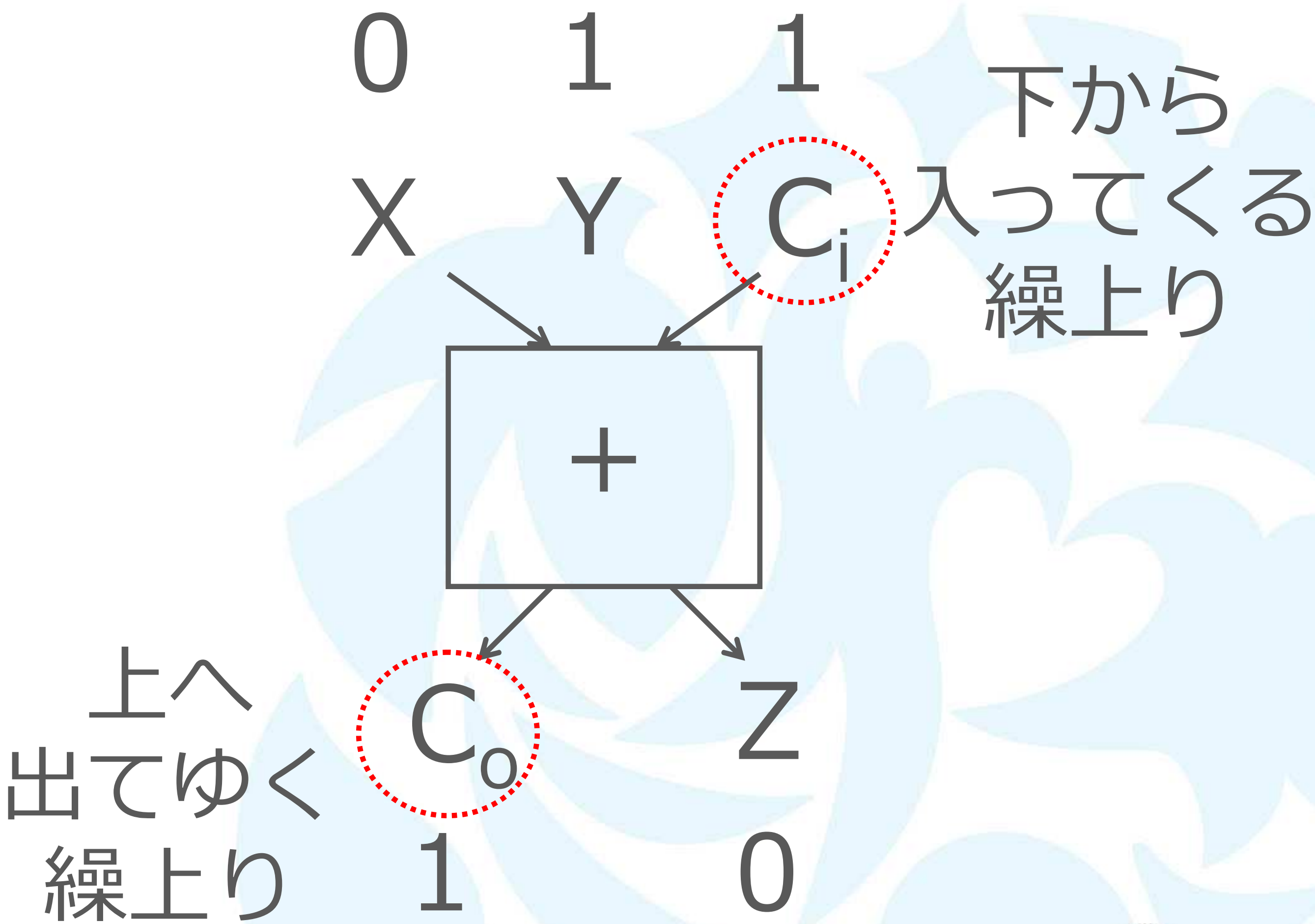
東邦大学

繰上り？

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & \\
 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0
\end{array}
$$

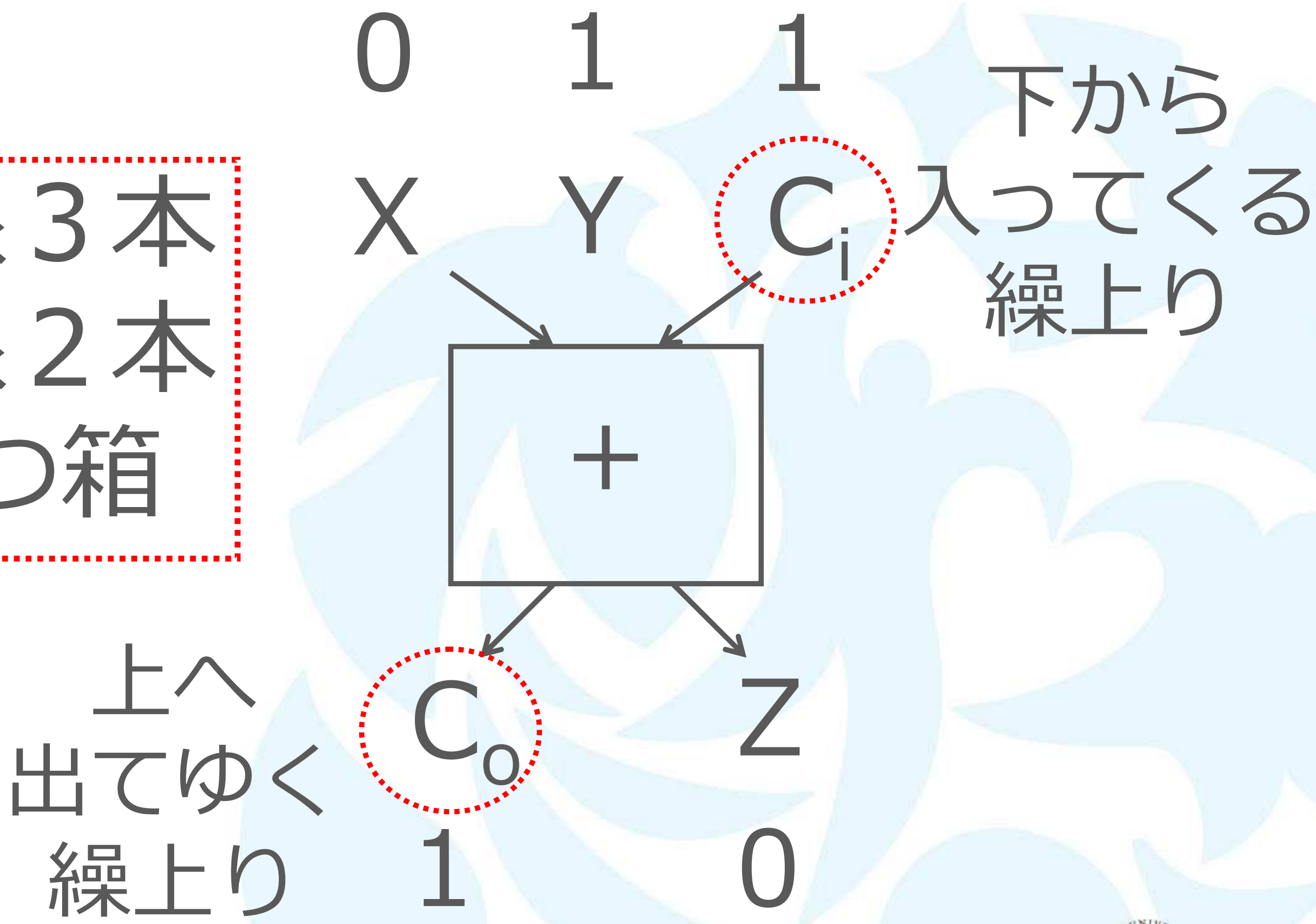
繰上りは入ってくる　繰上りは出てゆく

１桁の足し算ボックス・繰上り付き



１桁の足し算ボックス・繰上り付き

入力線３本
出力線２本
をもつ箱



１桁の足し算＝３入力２出力の箱

１桁の足し算＝３入力２出力の箱

それで、線の値の関係は？

１桁の足し算＝３入力２出力の箱

それで、線の値の関係は？

⇩

それぞれの入力線にどんな値（0/1）が入ると
それぞれの出力線にどんな値が出てくるのか

１桁の足し算＝３入力２出力の箱

それで、線の値の関係は？

それぞれの入力線にどんな値（0/1）が入ると
それぞれの出力線にどんな値が出てくるのか

表にしてみよう

東邦大学

１桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力　出力

TOHO UNIVERSITY NATURE LIFE MAN 東邦大学

１桁の足し算

０／１入力のすべての組合せ

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力　　出力

１桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力のすべての組合せ

0／1入力のすべての組合せ

入力

出力

それぞれの入力に対する出力の値

東邦大学

１桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

0／1入力のすべての組合せ

入力

出力

それぞれの入力に対する出力の値

表を埋めてみよう

東邦大学

1桁の足し算

入力のすべての0／1の組合せ

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

入力　出力

0+0+0=00
0+0+1=01
0+1+0=01
0+1+1=10
1+0+0=01
1+0+1=10
1+1+0=10
1+1+1=11

東邦大学

１桁の足し算

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

0／1入力のすべての組合せ

入力　出力

0+0+0=00
0+0+1=01
0+1+0=01
0+1+1=10
1+0+0=01
1+0+1=10
1+1+0=10
1+1+1=11

東邦大学

1桁の足し算

この表を実現する回路を作ればよい

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

入力　　出力

あとは
「組合せ回路」の
設計の問題

あとは
「組合せ回路」の
設計の問題
機械的な手順で設計できる

この授業ではカバーしません

さて

東邦大学

さて

１桁の足し算回路ができた

さて

１桁の足し算回路ができた

では、32ビットの整数の足し算は？

複数桁の足し算

$$\begin{array}{rccc} & & {}^{1} & \\ & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 \end{array}$$

複数桁の足し算

$$\begin{array}{rccc} & 0 & \overset{1}{1} & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 \end{array}$$

１桁を繰上りでつないでゆけばよい

複数桁の足し算

$$
\begin{array}{rccc}
 & & {}^{1} & \\
 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & \boxed{1}0
\end{array}
$$

１桁を繰上りでつないでゆけばよい

１桁加算器	１桁加算器	１桁加算器	１桁加算器

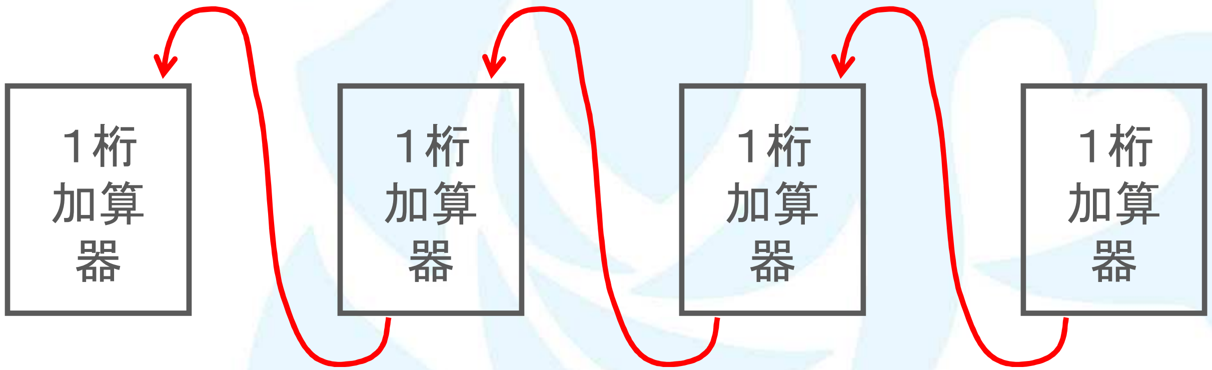
４桁

東邦大学

複数桁の足し算

$$
\begin{array}{rccc}
 & & {}^{1} & \\
 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 0
\end{array}
$$

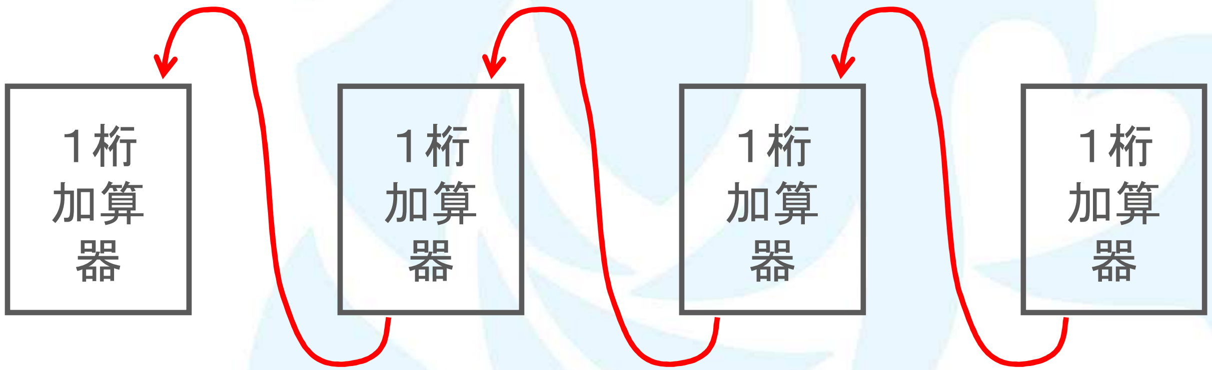
１桁を繰上りでつないでゆけばよい



複数桁の足し算

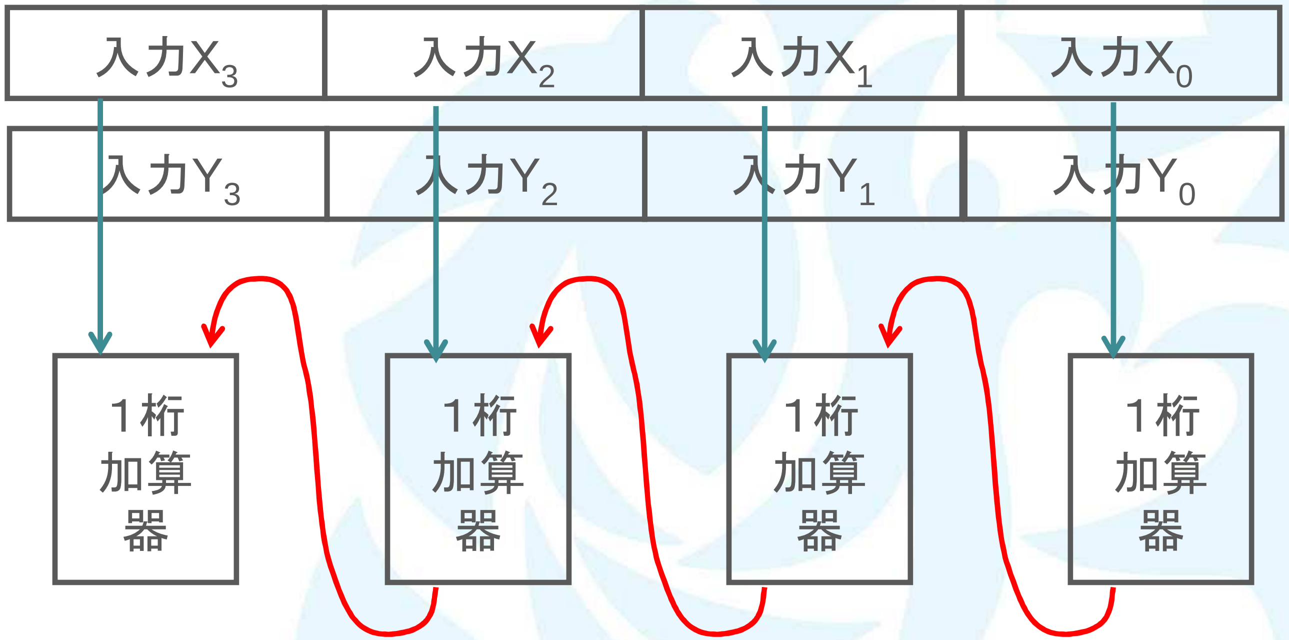
更にXとYの入力をつないで

入力X_3	入力X_2	入力X_1	入力X_0
入力Y_3	入力Y_2	入力Y_1	入力Y_0



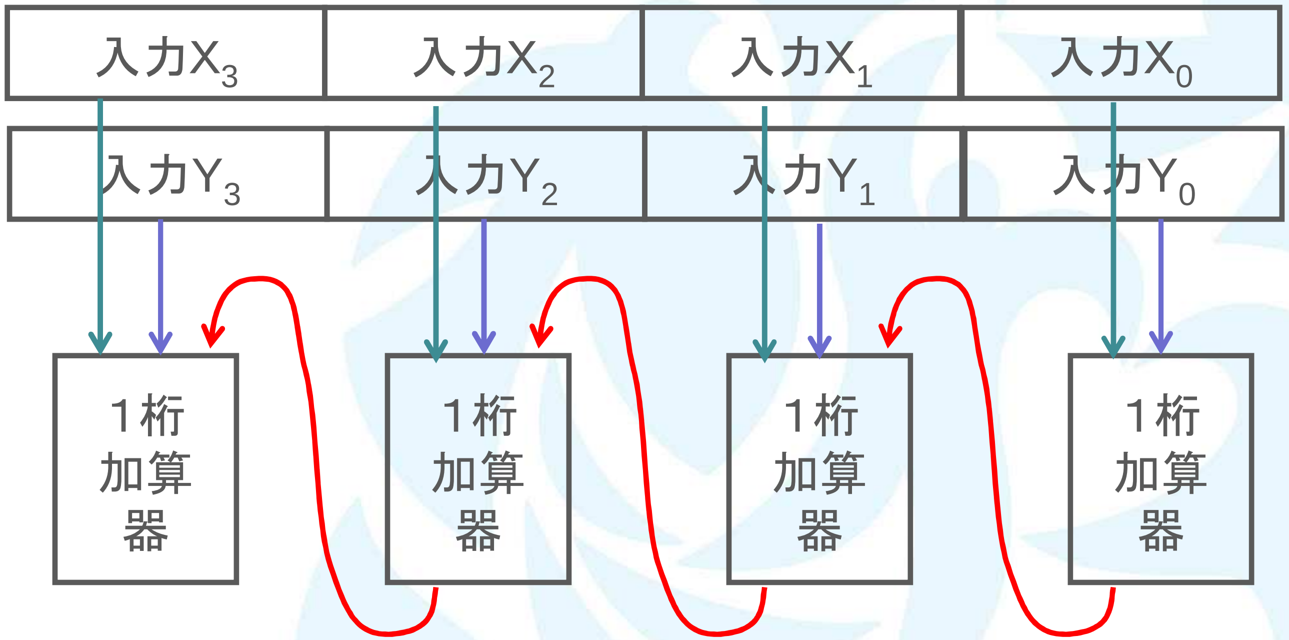
複数桁の足し算

更にXとYの入力をつないで



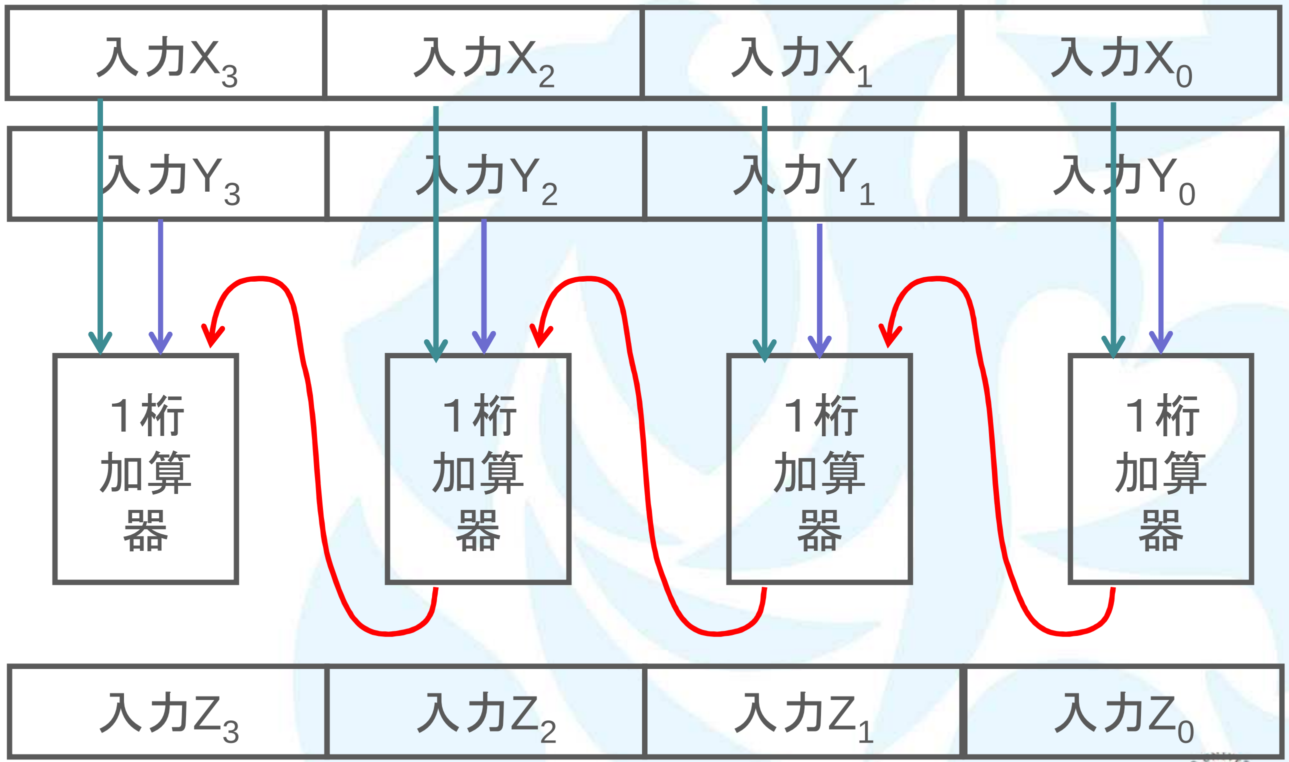
複数桁の足し算

更にXとYの入力をつないで



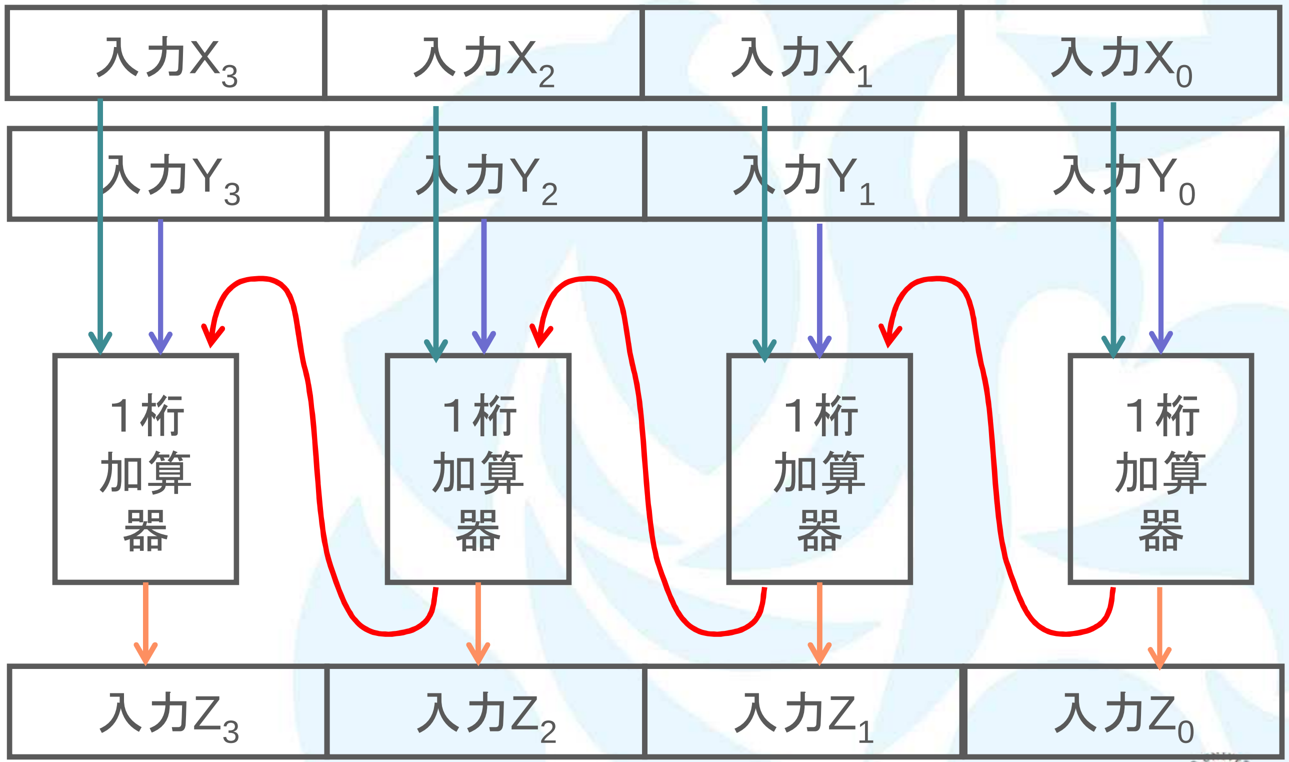
複数桁の足し算

更に出力Zをつないで



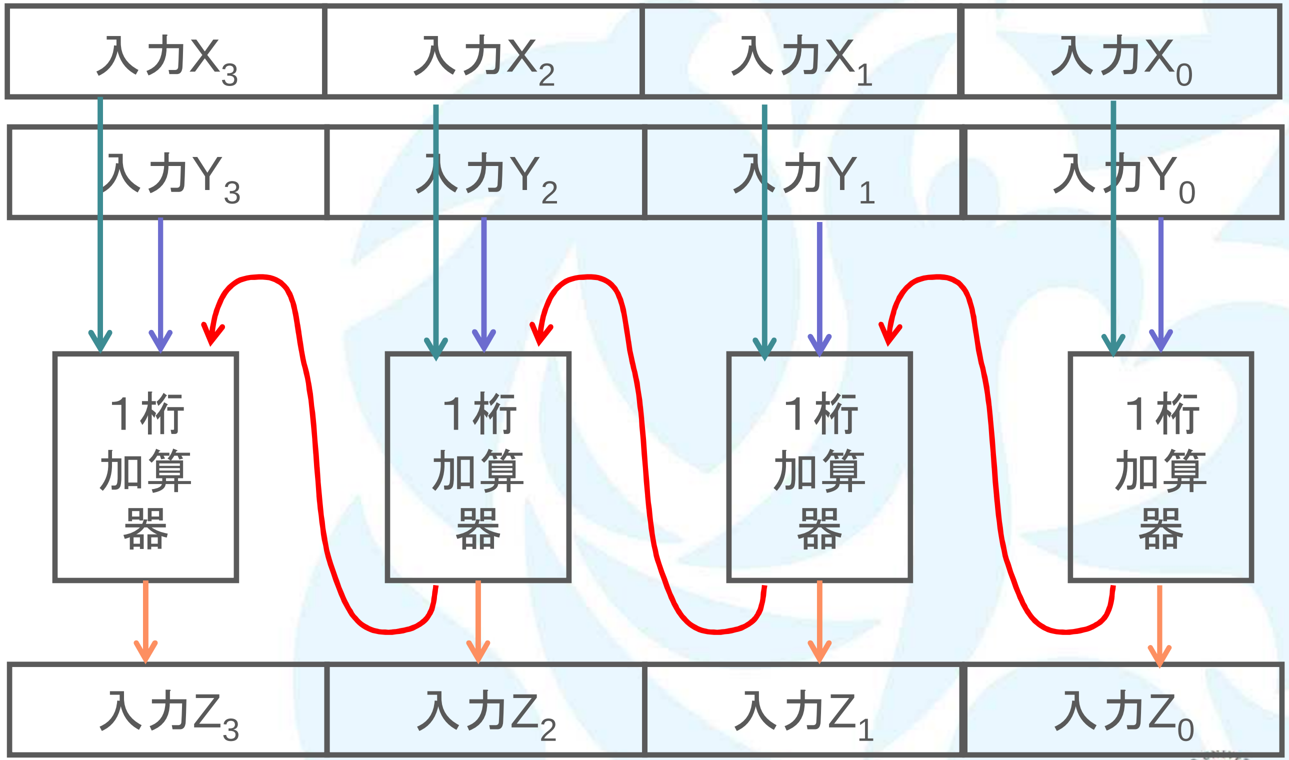
複数桁の足し算

更に出力Zをつないで



複数桁の足し算

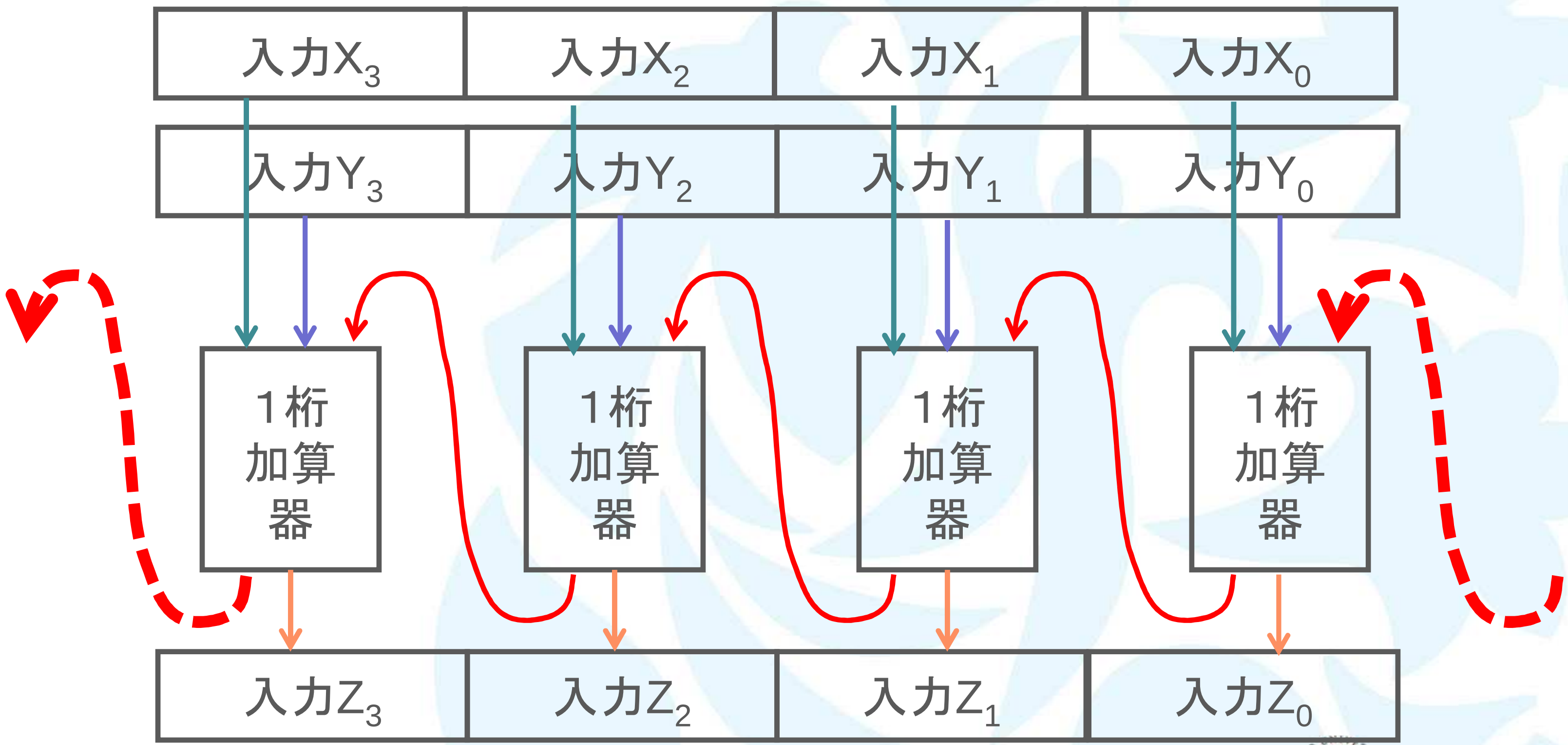
完成？



入力X_3
入力X_2
入力X_1
入力X_0
入力Y_3
入力Y_2
入力Y_1
入力Y_0
1桁加算器
1桁加算器
1桁加算器
1桁加算器
入力Z_3
入力Z_2
入力Z_1
入力Z_0

複数桁の足し算

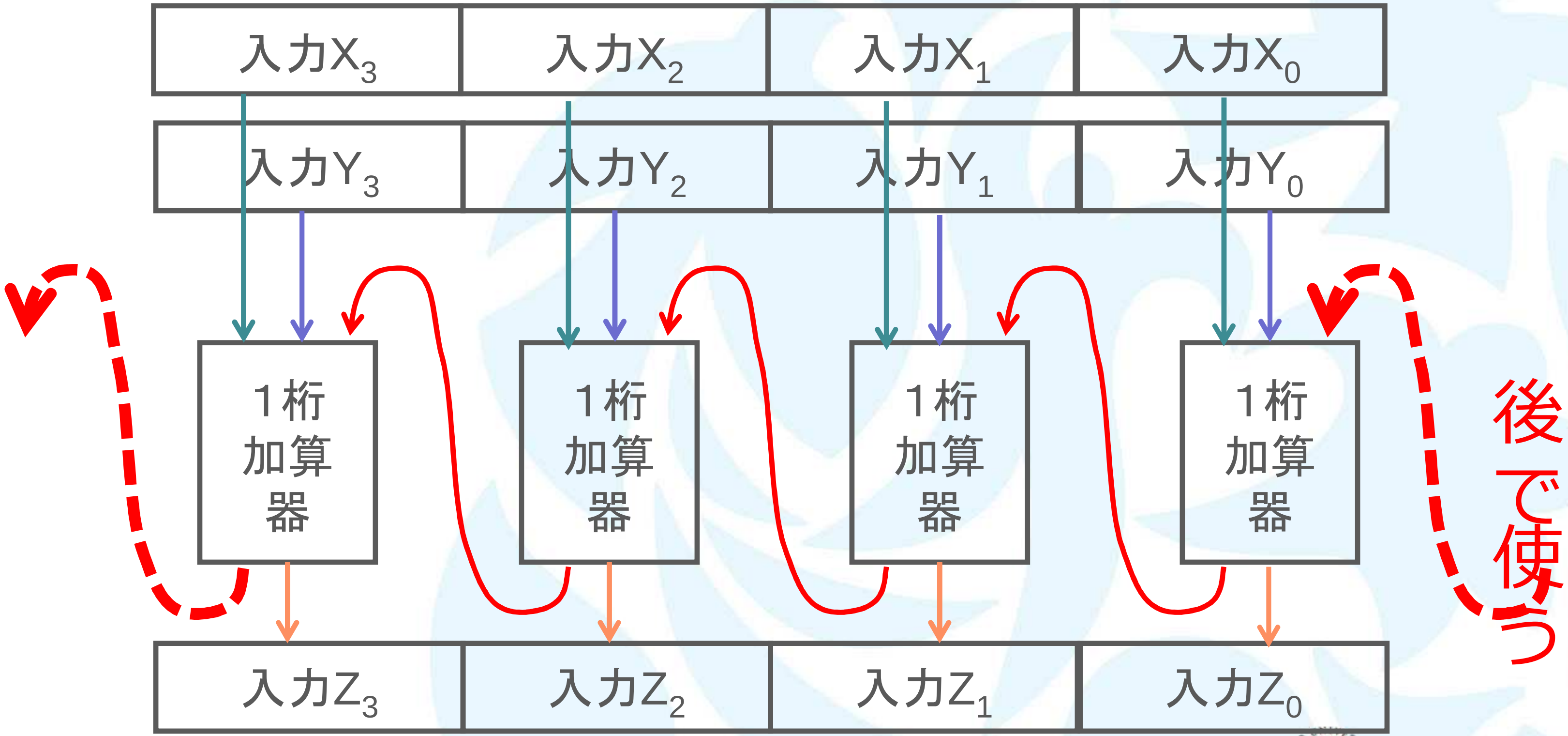
ここはどうする？



東邦大学

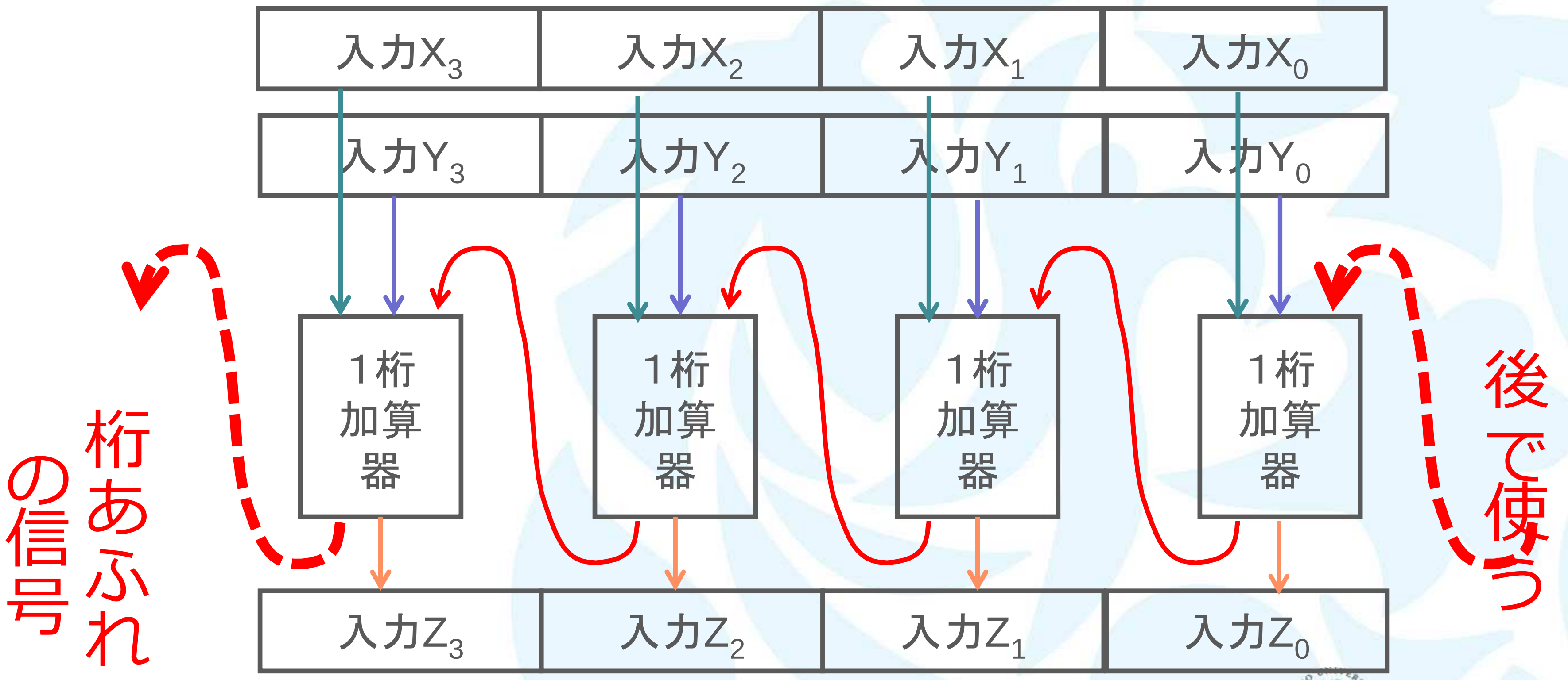
複数桁の足し算

ここはどうする？



複数桁の足し算

ここはどうする？



足し算回路の構成の仕方が
分かりましたか？

〇

×

次へ

東邦大学

では、確認の問題です

東邦大学

１桁の足し算回路の入力・出力の対応表(真理値表)を作って下さい

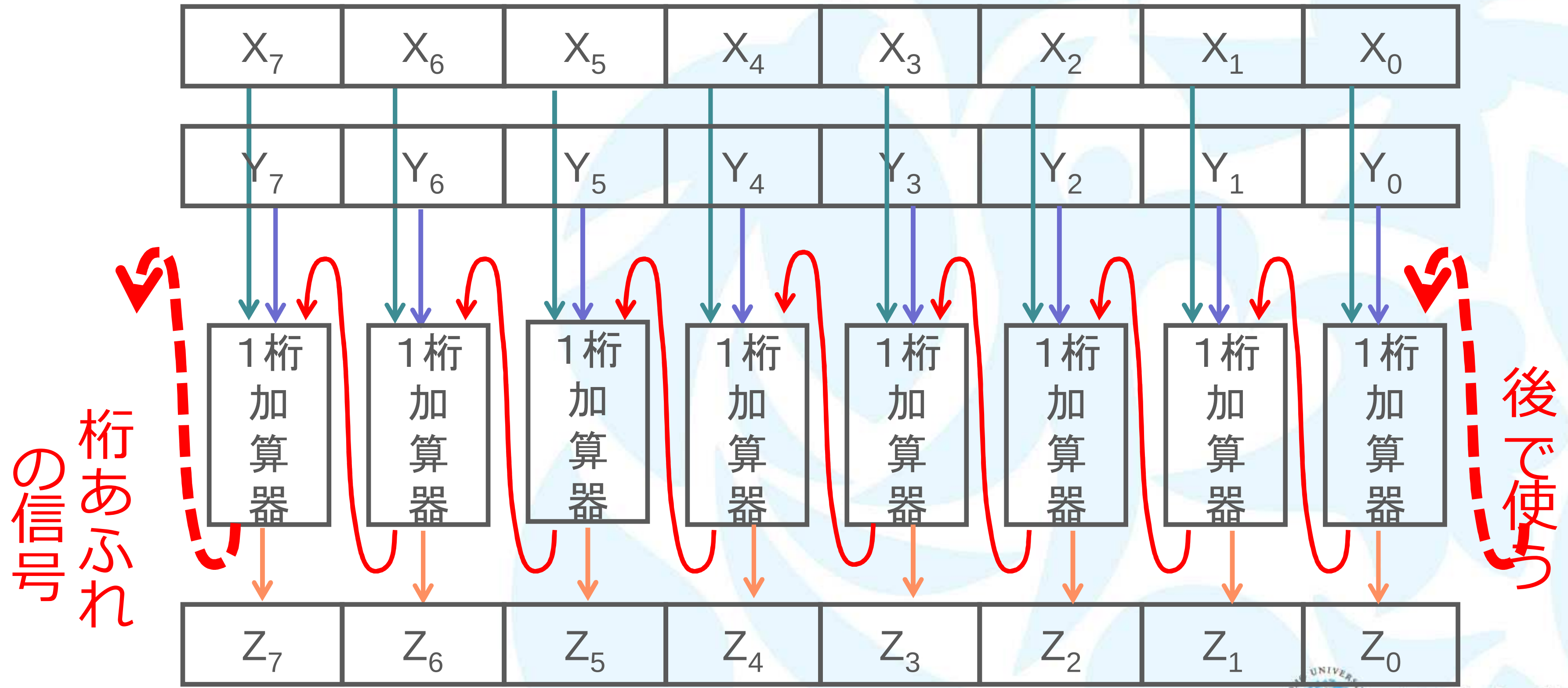
東邦大学

１桁の足し算回路の入力・出力の対応表(真理値表)を作って下さい

Ci	X	Y	Co	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

１桁の足し算回路をブロックと考えて
８桁の足し算回路を作って下さい

１桁の足し算回路をブロックと考えて８桁の足し算回路を作って下さい



東邦大学

できましたか？

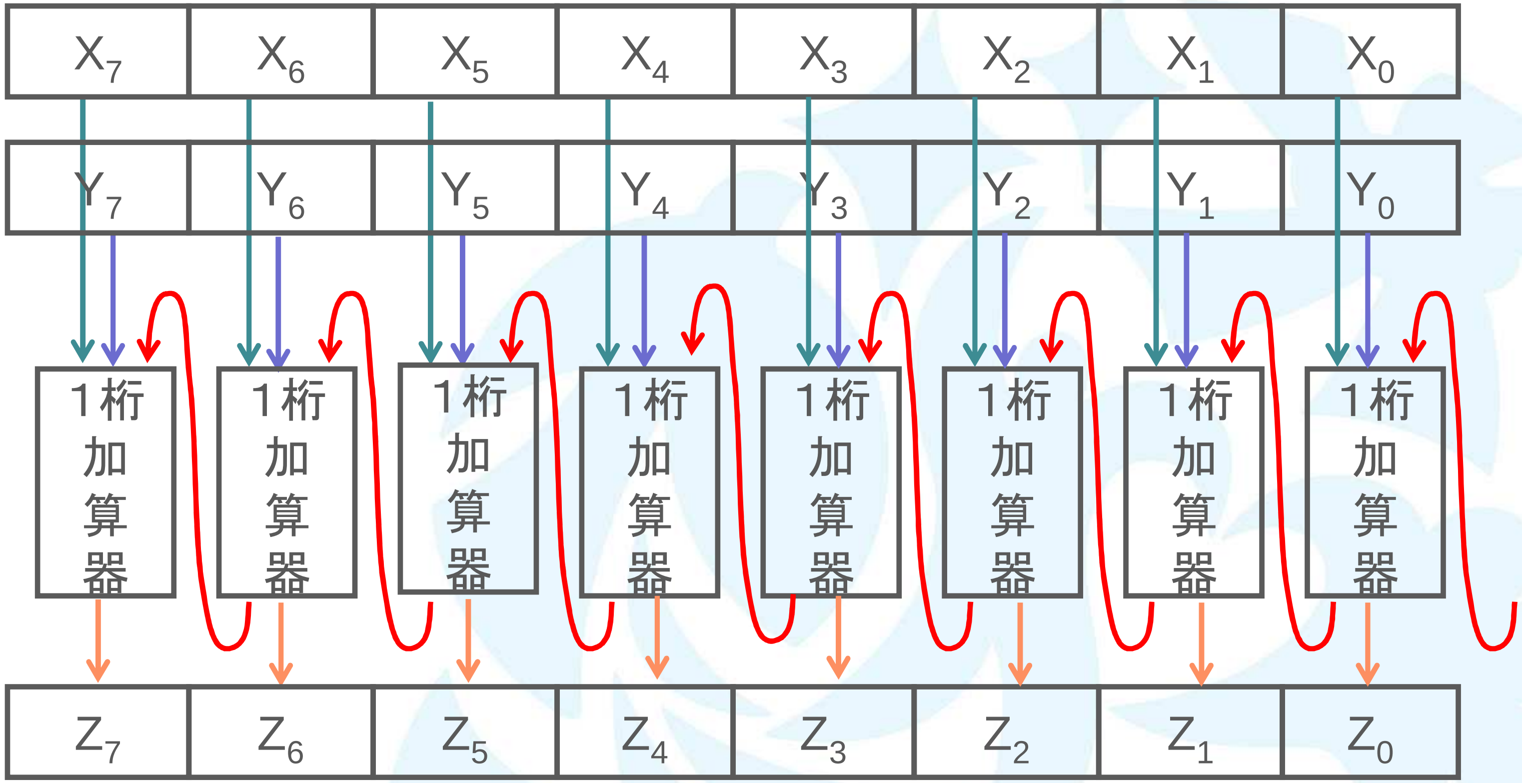
〇

×

次へ

おまけの話題　～　高速化

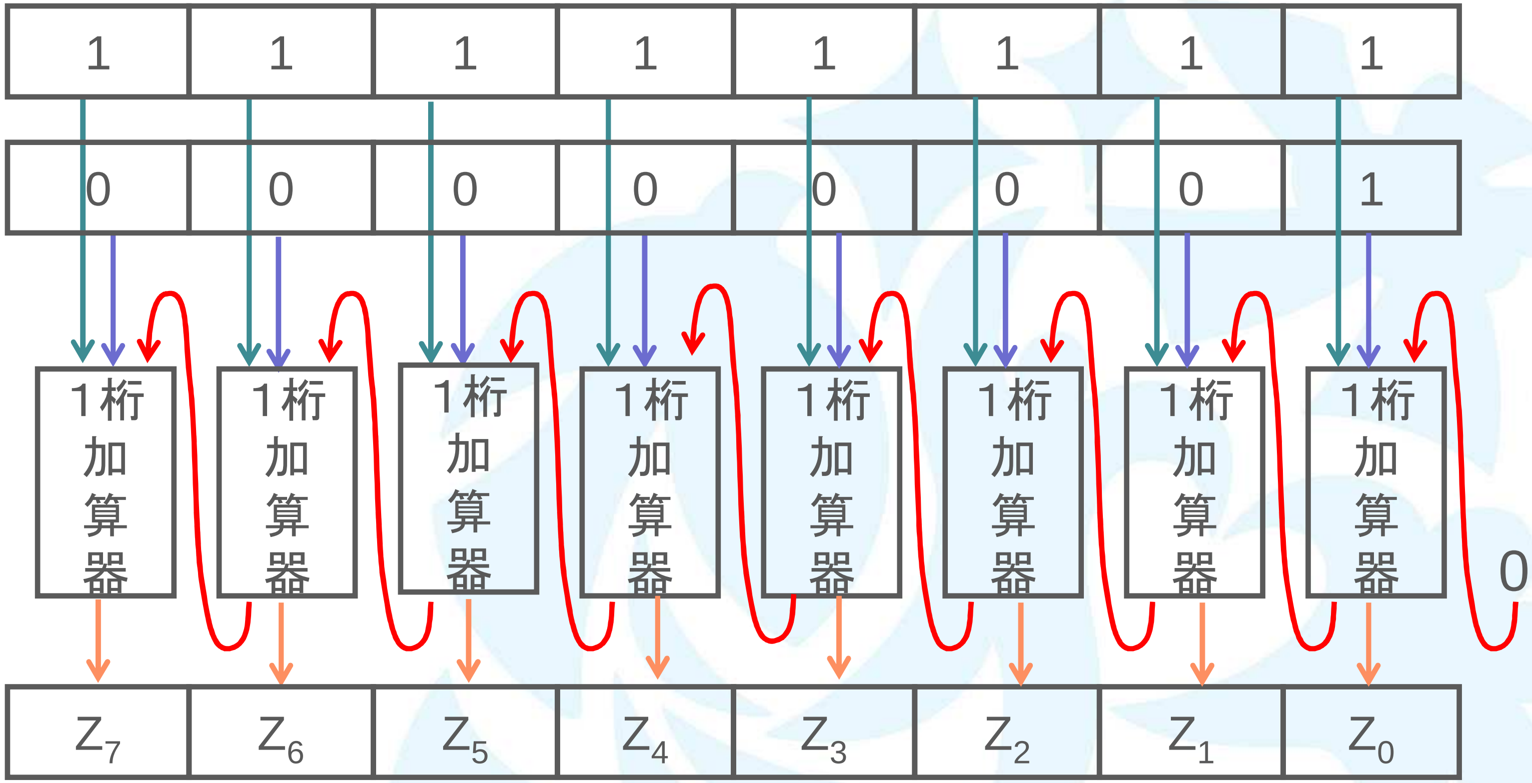
この回路はとろい



何で？

東邦大学

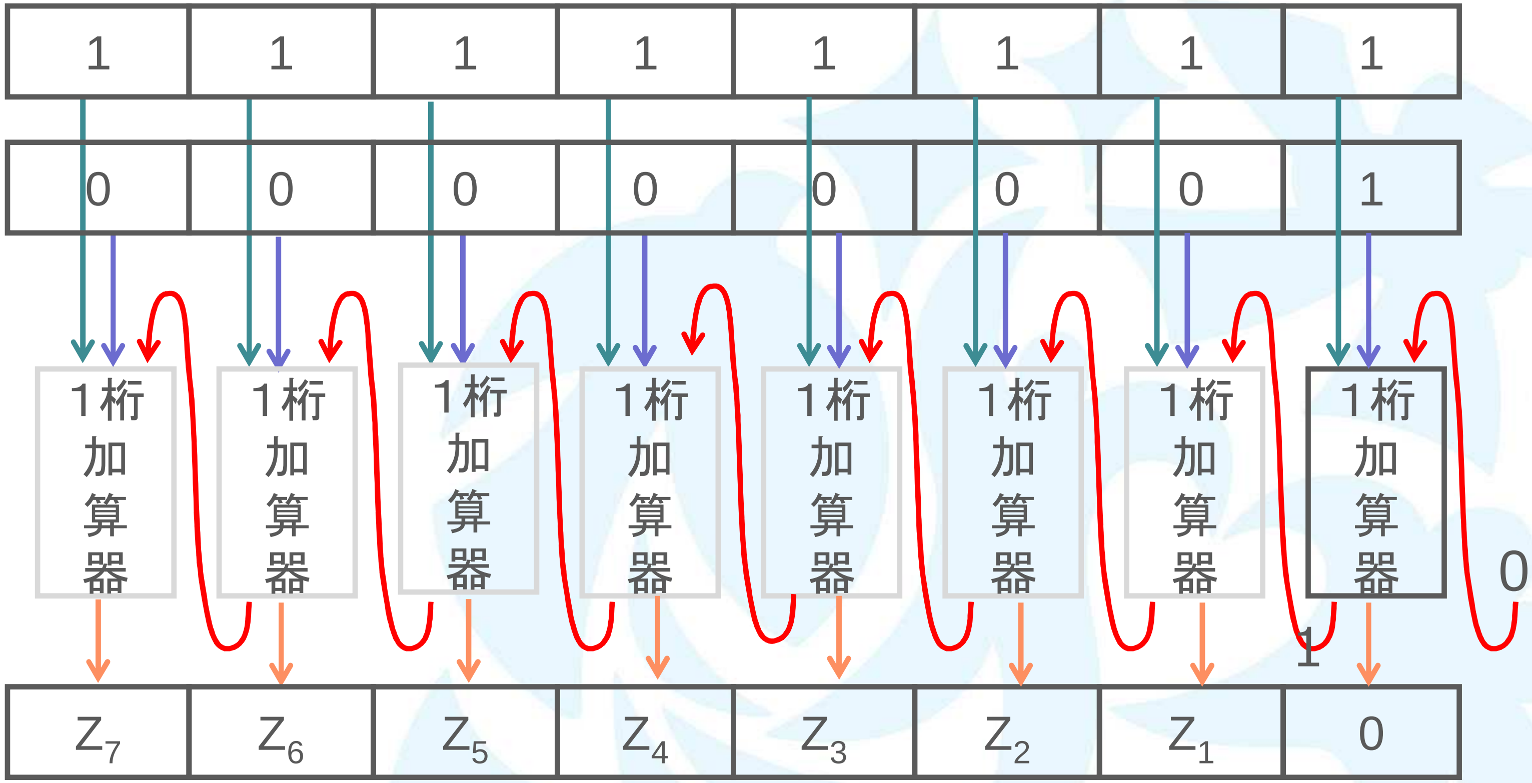
たとえば



を計算してみよ

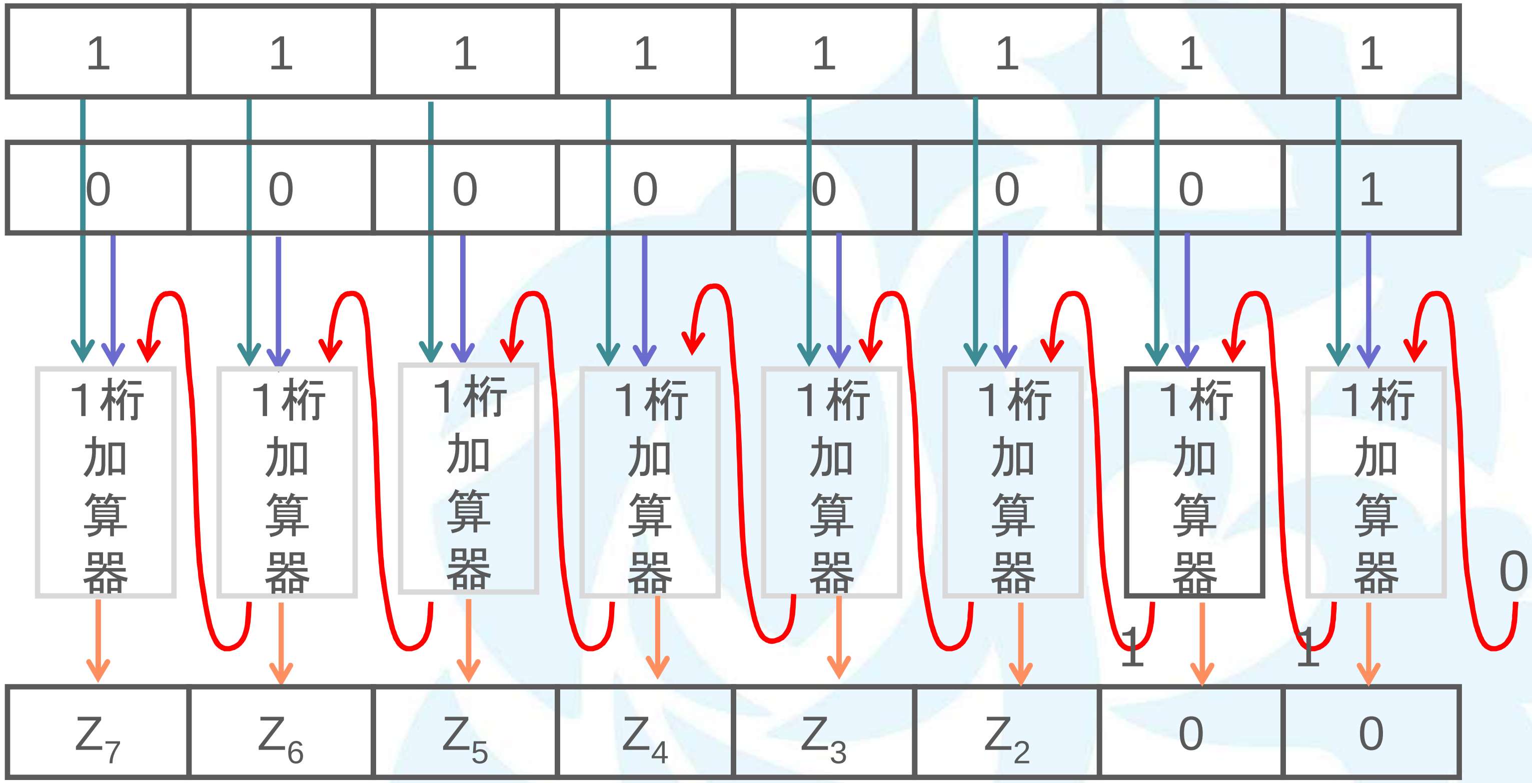
東邦大学

まず最下桁でZ_0を計算

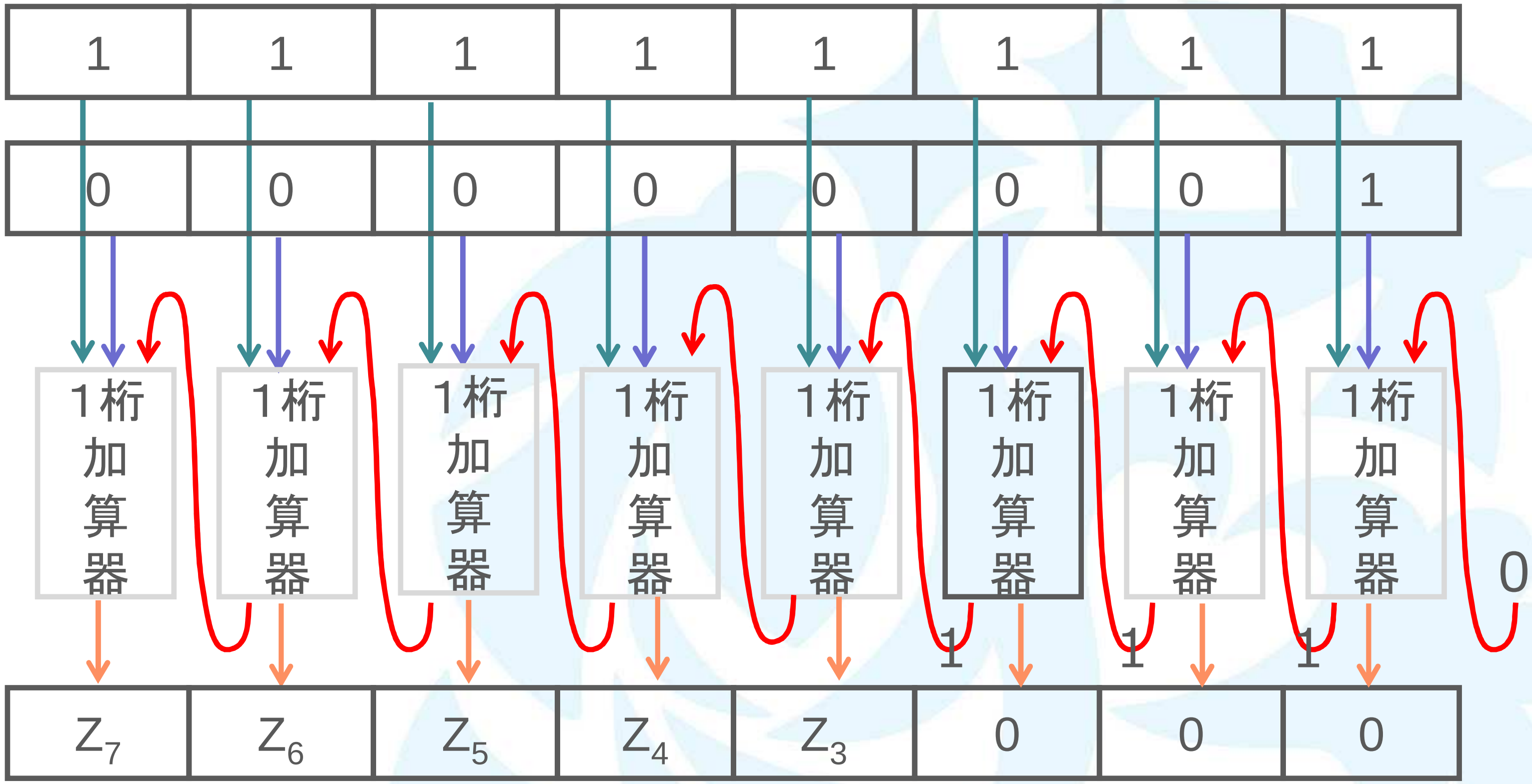


東邦大学

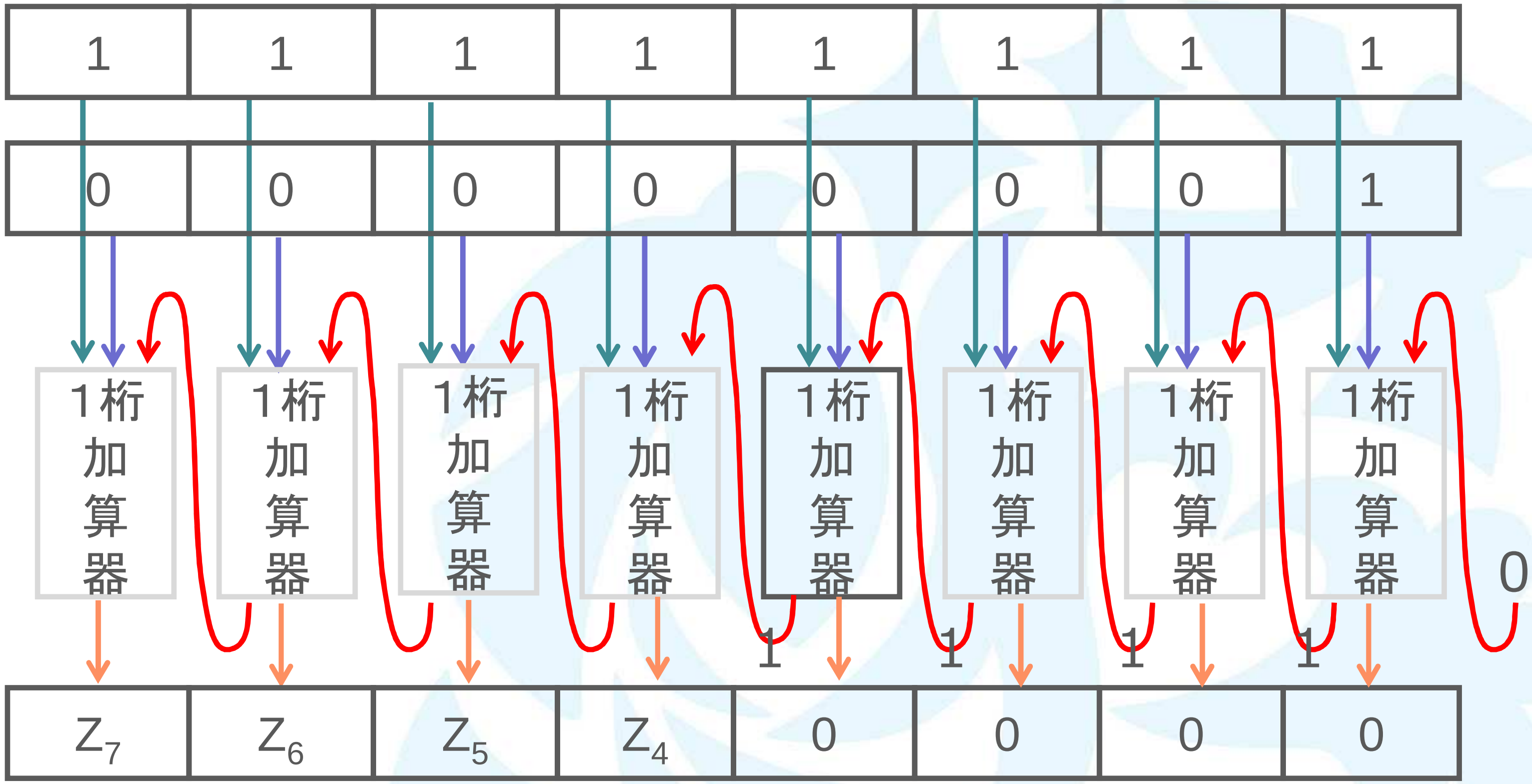
その結果を見てZ_1を計算



その結果を見てZ_2を計算



その結果を見てZ_3を計算



このように

このように

下の桁の(繰上りの)値が決まらないと

このように

下の桁の(繰上りの)値が決まらないと

上の桁が計算できない

東邦大学

このように

下の桁の(繰上りの)値が決まらないと

上の桁が計算できない

これを繰上り(キャリー)の伝搬と言う

このように

下の桁の(繰上りの)値が決まらないと

上の桁が計算できない

これを繰上り(キャリー)の伝搬と言う

この伝搬に時間がかかるのでとろい

では、どうすれば早くなるか？

東邦大学

では、どうすれば早くなるか？

キャリールックアヘッド回路

詳細には立ち入らないが、繰上り信号を
多段でなく１段で計算する回路。
たとえば32ビット×2の入力から各桁の
繰上りの値(32個)を１段で計算

東邦大学

おまけは終り

さて

足し算はできるようになりました

では、引算はどうする？

東邦大学

足し算はできるようになりました

では、引算はどうする？

引算 ＝ 符号反転して足し算

東邦大学

引算 ＝ 符号反転して足し算

$$\underbrace{5 - 3 = 5 + \underbrace{(-3)}_{\substack{\text{符号反転} \\ 3 \Rightarrow (-3)}}}_{\text{足し算}}$$

符号反転？

3 ⇒ (−3)

どうする？

符号反転？

3 ⇒ (－3)

2の補数を作ればいい

⇩

符号反転？

3 ⇒ (－3)

2の補数を作ればいい

⇩

ビット(0と1)を反転し
それに1を足す

覚えて
ますね

東邦大学

引算全体は

X	ー	Y

⇩

引算全体は

X − Y

Y

⇩

0と1を反転

⇩

1を足す

⇩

−Y

2の補数を作る

引算全体は

X　－　Y

0と1を反転

1を足す

2の補数を作る

X　＋　－Y

引算全体は

X	−	Y

⇩

0と1を反転

⇩

1を足す

⇩

2の補数を作る

X	+	−Y

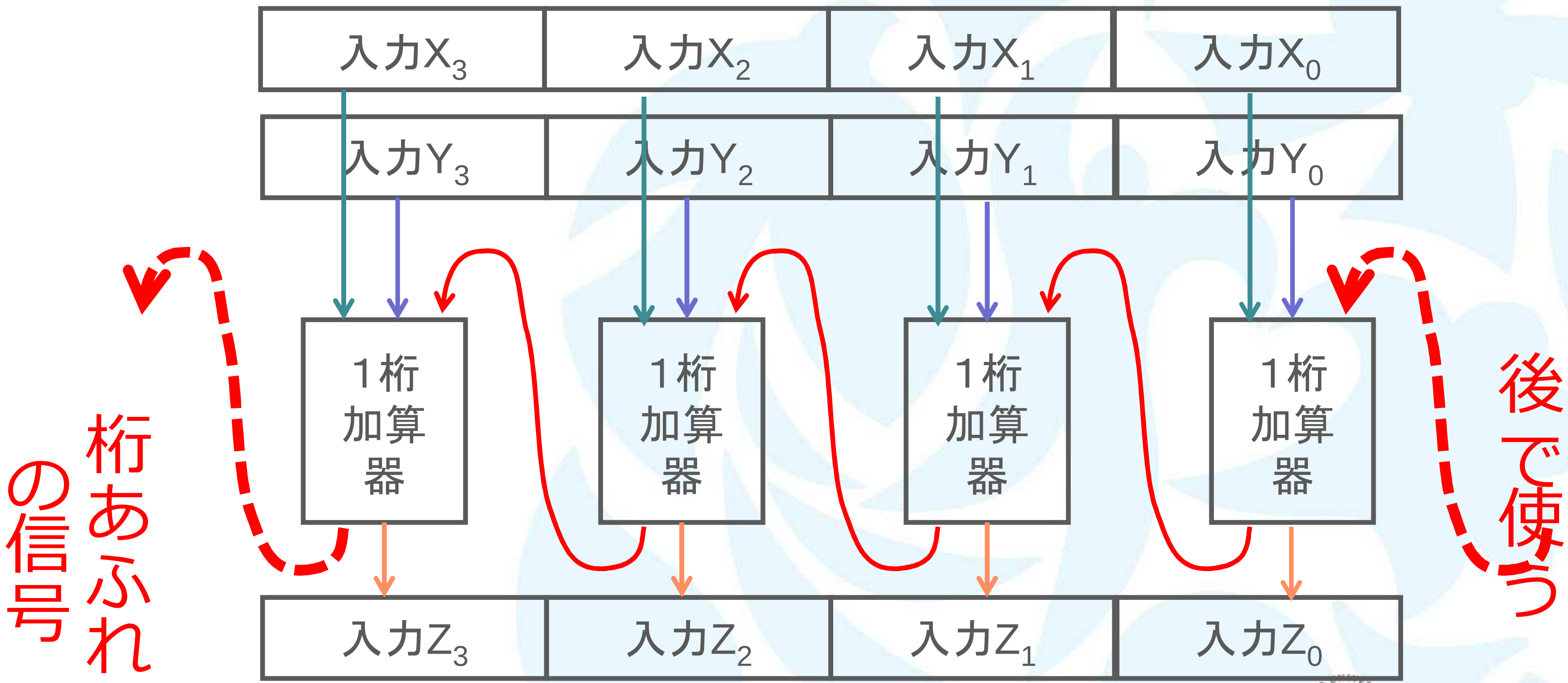
これを一緒に行う

⇩

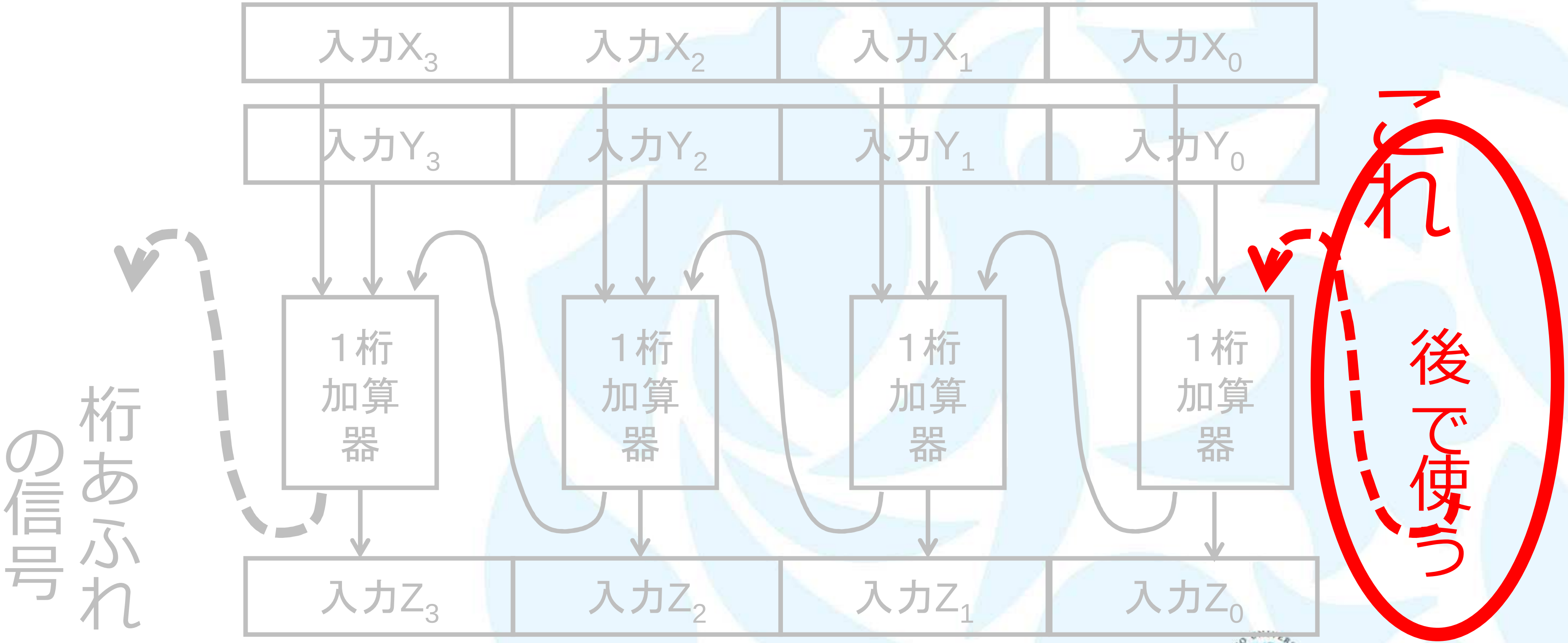
東邦大学

思い出してほしい
複数桁の足し算回路

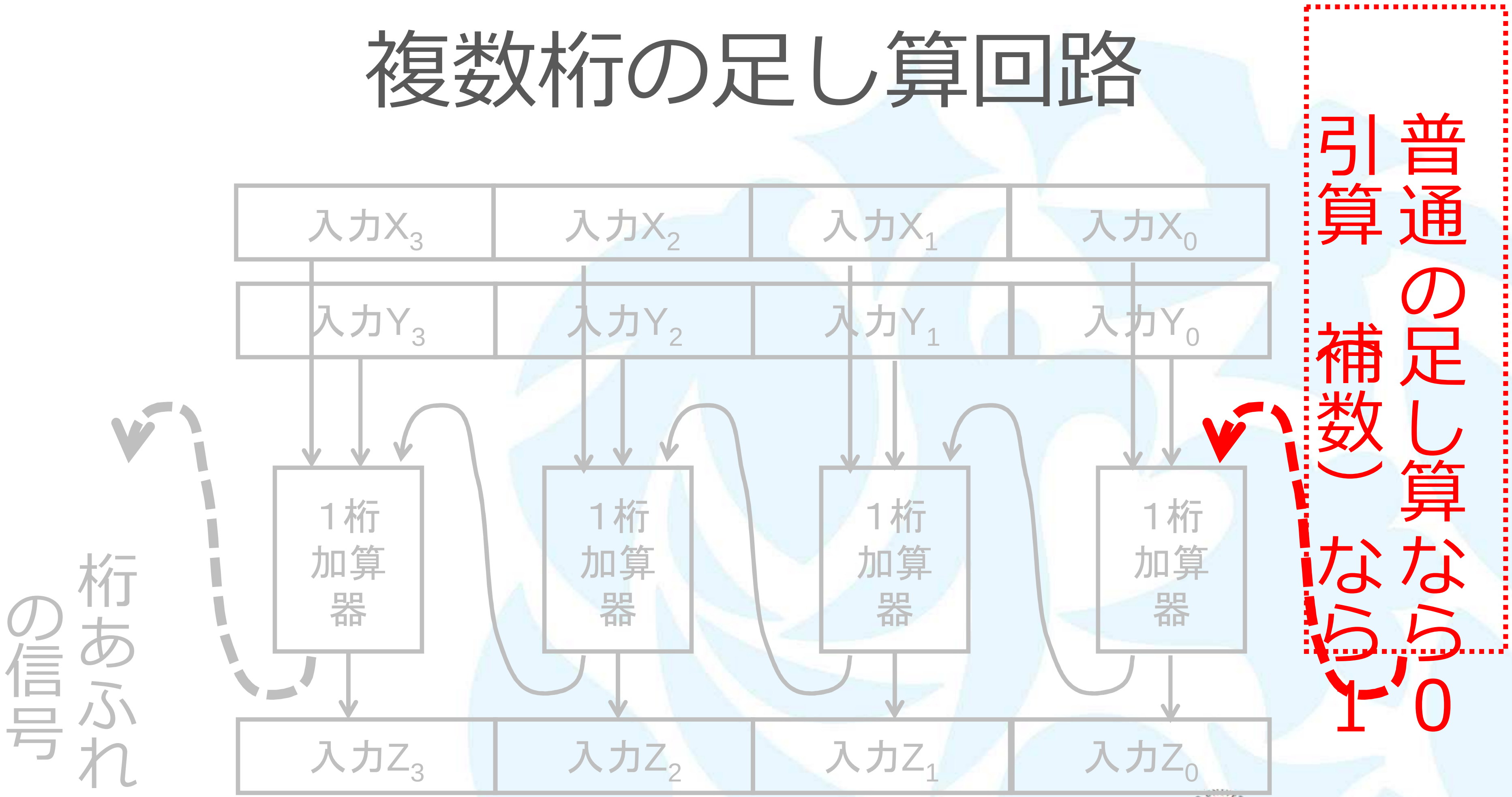
思い出してほしい
複数桁の足し算回路



思い出してほしい 複数桁の足し算回路



思い出してほしい
複数桁の足し算回路



東邦大学

引算全体は

X − Y

0と1を反転

1を足す

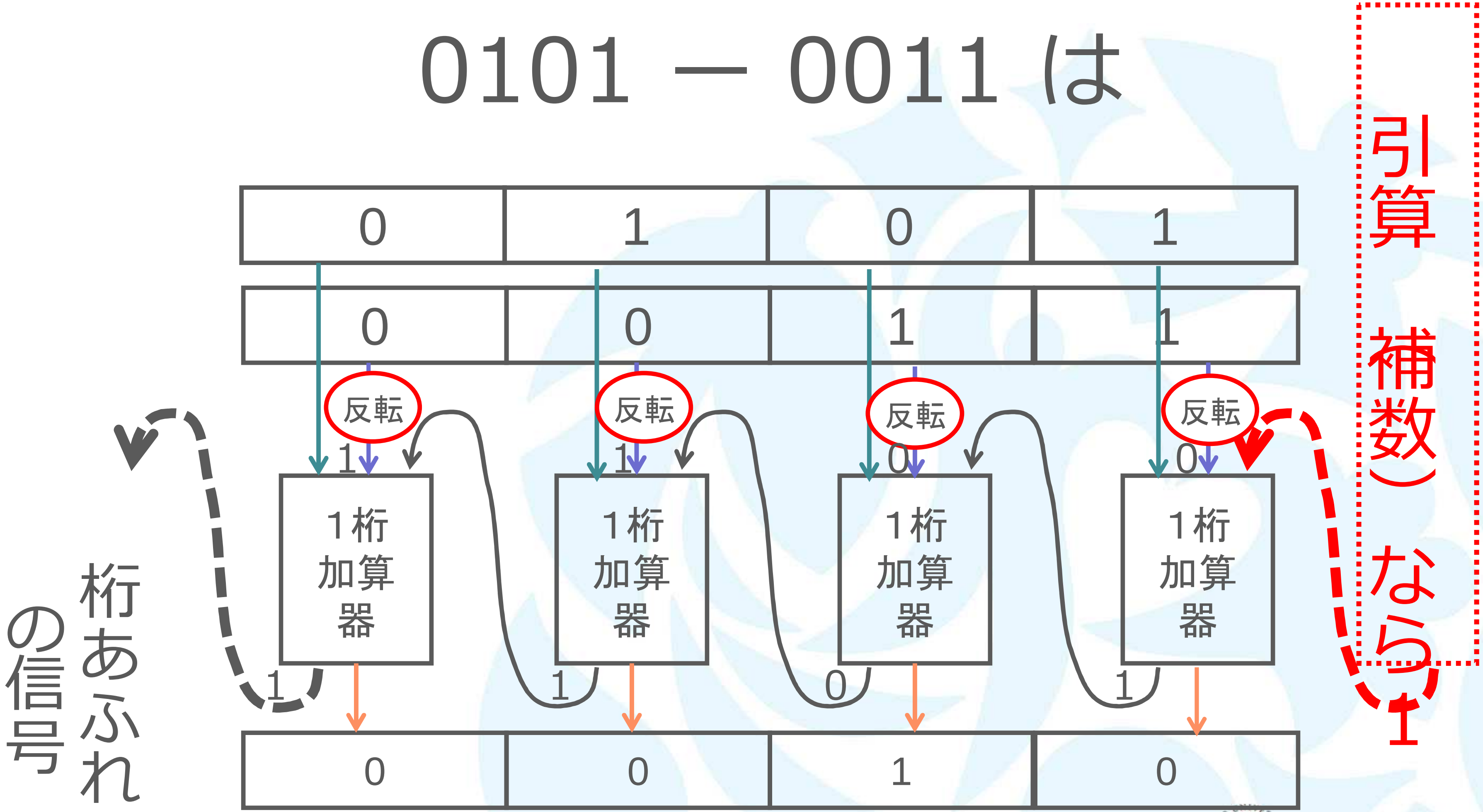
X ＋ −Y

2の補数を作る

これを一緒に行う

東邦大学

たとえば 0101 − 0011 は



のようにすればできる

東邦大学

のようにすればできる

教科書の図5.8を参照

東邦大学

引算回路を理解できましたか？

○

×

次へ

東邦大学