アーキテクチャ　第１回　論理演算　　資料

論理変数 x, y, z …、 論理演算（論理関数） ∧（かつ）, ∨（または）, ¬（否定） を考える。

1） 論理変数 x が取ることのできる値は何か　　　0 か 1 （真 truth か偽 false）

2） 論理演算（関数） $x \wedge y$ の、

①入力として与える値は何か　　　(x, y) の組で、(0, 0)、(0,1)、(1, 0)、(1, 1) の４通りが考えられる

②出力として得られる値は何か　　　1つの論理値 0 か 1

③ $x \wedge y$ の入出力の関係（関数関係）を書いてみよ。

（言い方1） $x=0.\ y=0$ なら、$x \wedge y = 0$

$x=0.\ y=1$ なら、$x \wedge y = 0$

$x=1.\ y=0$ なら、$x \wedge y = 0$

$x=1.\ y=1$ なら、$x \wedge y = 1$

（言い方2） 真理値表

x	y	x∧y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

（演習問題）

① $x \vee y$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

② $\neg x$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

3） 論理式は、論理演算子 ∧、∨、¬ やそのほかの関数を使って表わした式。 値は論理値。 カッコで演算の順序を表すことができる（今まで習ってきた式と同じ感覚）。

① $x=0,\ y=1$ のとき、式 $(x \wedge y) \vee y$ の値は何か

② $(x \wedge y) \vee y$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

③ $(x \wedge y) \vee (x \wedge y)$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

④ $(x \wedge y) \vee z$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ （入力は3つ。どのような入力パターンがあるか）

⑤ $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$ と $y \wedge z$ が等価であることを示せ （等価＝真理値表が同じ）

（演習問題）

① $x \wedge x$ を、真理値表で表わせ。 $x \vee x$ を、真理値表で表わせ。

② $((x \vee y) \wedge (x \wedge y)) \vee y$ を、真理値表で表わせ。

＜注目してほしいこと＞　任意の式について、その動作（すべての入力パターンに対する出力）を計算できる

4） （やりたい人だけ） 論理演算のいろいろな公式（等式）

たとえば、次のような等式が成り立つ。 これを使って、論理式を変形することができる。

交換律： $x \wedge y = y \wedge x$　　$x \vee y = y \vee x$

結合律： $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$　　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

分配則： $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

吸収律： $x \vee (x \wedge y) = x$　　$x \wedge (x \vee y) = x$

その他： $x \vee (\neg x) = \mathrm{True}$　　$x \wedge (\neg x) = \mathrm{False}$　　$x \vee x = x$　　$x \wedge x = x$

$x \wedge \mathrm{True} = x$　　$x \wedge \mathrm{False} = \mathrm{False}$　　$x \vee \mathrm{False} = x$　　$x \vee \mathrm{True} = \mathrm{True}$

（練習） $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) = y \wedge z$ であることを示せ

$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$

$= (x \wedge (y \wedge z)) \vee (\neg x \wedge (y \wedge z))$

$= (x \lor \neg x) \land (y \land z)$

$= \mathrm{True} \land (y \land z)$

$= y \land z$

（演習問題）

$((x \lor y) \land (x \land y)) \lor y = y$ 　を導いてみよ

5） 加法標準形・乗法標準形

論理式のうち、特定の形をしたもの：

加法標準形： 最初に否定(NOT)をとったあと、積（AND)を先にとって、それらの和（OR） という形

例） $x \lor (y \land z)$ 、 $(\neg x \land z) \lor (y \land z)$ 、 $(x \land z) \lor (\neg y \land \neg z)$

加法標準形でないもの $x \land (y \lor z)$ 　OR が AND より先、

$(x \land z) \lor \neg(y \land z)$ 　NOT が AND より先

（おまけ） 加法標準形に直したければ、

$x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z)$ （分配則） これなら AND が先で OR が後になっている

$(x \land z) \lor \neg(y \land z) = (x \land z) \lor \neg y \lor \neg z$ （ド・モルガンの法則）

乗法標準形： 最初に否定（NOT）をとったあと、和（OR)を先にとって、それらの積（AND） という形

（演習問題）

論理式 $(x \lor y) \land (x \land y) \lor y$ 　を加法標準形に変換せよ

＜注目してほしいこと＞ 任意の論理式は、加法標準形に変換（展開）できる。 同様に乗法標準形に変換できる。

6） 真理値表から加法標準形を作る

真理値表のそれぞれの行は、入力 x, y, z の値のどれか１つの組合せを表す ⇒ その時だけ1になる式を作ることができる

x	y	z		f(x,y,z)		この入力の組合せの時だけ1になる式
0	0	0		0		$\neg x \land \neg y \land \neg z$
0	0	1		0		$\neg x \land \neg y \land z$
0	1	0		0		$\neg x \land y \land \neg z$
0	1	1		1		$\neg x \land y \land z$
1	0	0		0		$x \land \neg y \land \neg z$
1	0	1		1		$x \land \neg y \land z$
1	1	0		1		$x \land y \land \neg z$
1	1	1		1		$x \land y \land z$

これで入力パターンの選択ができる。入力によってどれか１つの行が起きる。複数の行が起きることはない。 入力のパターンによって、ほしい出力（関数 f の値）を1にするか0にするか、してやればよい。

実際は、これらの論理和をとって出力にするので、出力が0の行は考えなくてもよい。 出力が1になる行だけを拾って、OR で繋げばよい。 この結果、加法標準形の式が得られる。

$f(x, y, z) = (\neg x \land y \land z) \lor (x \land \neg y \land z) \lor (x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land z)$

ビデオ中の例題をやってみよ。

＜注目してほしいこと＞ 真理値表を必ず加法標準形に変換できる。（その手順が存在する）

＜注目２＞ （任意の論理式 ⇒ 真理値表の変換）、（任意の真理値表 ⇒ 論理式） の変換ができる → 両者は同等