

論理変数 $x, y, z \dots$ 、論理演算(論理関数) \wedge (かつ), \vee (または), \neg (否定) を考えます。

1) 論理変数 x が取ることのできる値は何か 0 か 1 (真 truth か偽 false)

2) 論理演算(関数) $x \wedge y$ の、

①入力として与える値は何か (x, y) の組で、(0, 0)、(0,1)、(1, 0)、(1, 1) の4通りが考えられる

②出力として得られる値は何か 1つの論理値 0か1

③ $x \wedge y$ の入出力の関係(関数関係)を書いてみよ。

(言い方1) $x=0, y=0$ なら、 $x \wedge y = 0$

$x=0, y=1$ なら、 $x \wedge y = 0$

$x=1, y=0$ なら、 $x \wedge y = 0$

$x=1, y=1$ なら、 $x \wedge y = 1$

(言い方2)

真理値表

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(演習問題)

① $x \vee y$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

② $\neg x$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

3) 論理式は、論理演算子 \wedge, \vee, \neg やそのほかの関数を使って表わした式。値は論理値。カッコで演算の順序を表すことができます (今まで習ってきた式と同じ感覚)。

① $x=0, y=1$ のとき、式 $(x \wedge y) \vee y$ の値は何か

② $(x \wedge y) \vee y$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

③ $(x \wedge y) \vee (x \wedge y)$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ

④ $(x \wedge y) \vee z$ の入出力の関係を、真理値表を使って表わせ (入力は3つ。どのような入力パターンがあるか)

⑤ $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$ と $y \wedge z$ が等価であることを示せ (等価=真理値表が同じ)

(演習問題)

① $x \wedge x$ を、真理値表で表わせ。 $x \vee x$ を、真理値表で表わせ。

② $((x \vee y) \wedge (x \wedge y)) \vee y$ を、真理値表で表わせ。

<注目してほしいこと> 任意の式について、その動作(すべての入力パターンに対する出力)を計算できる

4) (やりたい人だけ) 論理演算のいろいろな公式(等式)

たとえば、次のような等式が成り立つ。これを使って、論理式を変形することができます。

交換律: $x \wedge y = y \wedge x$ $x \vee y = y \vee x$

結合律: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

分配則: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

吸収律: $x \vee (x \wedge y) = x$ $x \wedge (x \vee y) = x$

その他: $x \vee (\neg x) = \text{True}$ $x \wedge (\neg x) = \text{False}$ $x \vee x = x$ $x \wedge x = x$

$x \wedge \text{True} = x$ $x \wedge \text{False} = \text{False}$ $x \vee \text{False} = x$ $x \vee \text{True} = \text{True}$

(練習) $(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) = y \wedge z$ であることを示せ

$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$

$= (x \wedge (y \wedge z)) \vee (\neg x \wedge (y \wedge z))$

$$\begin{aligned}
&= (x \vee \neg x) \wedge (y \wedge z) \\
&= \text{True} \wedge (y \wedge z) \\
&= y \wedge z
\end{aligned}$$

(演習問題)

$$((x \vee y) \wedge (x \wedge y)) \vee y = y \quad \text{を導いてみよ}$$

5) 加法標準形・乗法標準形

論理式のうち、特定の形をしたもの:

加法標準形: 最初に否定(NOT)をとったあと、積(AND)を先にとって、それらの和(OR) という形

例) $x \vee (y \wedge z)$ 、 $(\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ 、 $(x \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)$

加法標準形でないもの $x \wedge (y \vee z)$ ORがANDより先、

$$(x \wedge z) \vee \neg(y \wedge z) \quad \text{NOTがANDより先}$$

(おまけ) 加法標準形に直したければ、

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{分配則}) \quad \text{これならANDが先でORが後になっている}$$

$$(x \wedge z) \vee \neg(y \wedge z) = (x \wedge z) \vee \neg y \vee \neg z \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

乗法標準形: 最初に否定(NOT)をとったあと、和(OR)を先にとって、それらの積(AND) という形

(演習問題)

論理式 $(x \vee y) \wedge (x \wedge y) \vee y$ を加法標準形に変換せよ

<注目してほしいこと> 任意の論理式は、加法標準形に変換(展開)できる。同様に乗法標準形に変換できる。

6) 真理値表から加法標準形を作る

真理値表のそれぞれの行は、入力 x, y, z の値のどれか1つの組合せを表す \Rightarrow その時だけ1になる式を作ることができる

x	y	z	f(x,y,z)	この入力の組合せの時だけ1になる式
0	0	0	0	$\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$
0	0	1	0	$\neg x \wedge \neg y \wedge z$
0	1	0	0	$\neg x \wedge y \wedge \neg z$
0	1	1	1	$\neg x \wedge y \wedge z$
1	0	0	0	$x \wedge \neg y \wedge \neg z$
1	0	1	1	$x \wedge \neg y \wedge z$
1	1	0	1	$x \wedge y \wedge \neg z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$

これで入力パターンの選択ができる。入力によってどれか1つの行が起きる。複数の行が起きることはない。入力のパターンによって、ほしい出力(関数 f の値)を1にするか0にするか、してやればよい。

実際は、これらの論理和をとって出力にするので、出力が0の行は考えなくてもよい。出力が1になる行だけを拾って、ORで繋げばよい。この結果、加法標準形の式が得られる。

$$f(x, y, z) = (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

ビデオ中の例題をやってみましょう(各自自習)。

<注目してほしいこと> **真理値表を必ず加法標準形に変換できる。**(その手順が存在する)

<注目2> (任意の論理式 \Rightarrow 真理値表の変換)、(任意の真理値表 \Rightarrow 論理式)の変換ができる \rightarrow 両者は同等